Transformée de Laplace

M. CHATEAU David

21/05/2010

Résumé

Mémento sur la transformée de Laplace

Table des matières

1 Transformation de Laplace **3**
1.1 Condition suffisante d'existence 3
1.2 Linéarité 3
1.3 Translation en t 3
1.4 Translation en p 3
1.5 Changement d'échelle 4
1.6 Dérivation de la transformée 4
1.7 Transformée de la dérivée 4
1.8 Primitivation de la transformée 4
1.9 Transformée de la primitivelim 4

2 Tranformées de Laplace usuelles **5**

3 Règles de calcul **5**

4 Propriétés **5**

5 Inversion **6**

6 Convolution **6**

7 Cas des fonctions périodiques **6**

8 Résolution d'équation différentielle **6**

1 Transformation de Laplace

C'est en gros la généralisation de la transformée de Fourier.

Si f est une fonction localement intégrable, définie sur $\mathbb{R}^+$ (causale), on appelle transformée de Laplace de f la fonction $L[f] = F$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:

$$L[f](p) = F(p) = \int_0^\infty H(t)f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t \quad p = \alpha + i\beta$$

En général, la convergence de l'intégrale n'est pas assurée pour tout p. On appelle abscisse de convergence absolue de la transformée de Laplace le réel :

$$x_0 = inf\,\{x \in \mathbb{R}/F\ ACV\}$$

On a alors convergence dans le demi-plan complexe défini par $Re(p) = \alpha > x_0$.

On note $f(t) \sqsupset F(p)$ ou $F(p) \sqsubset f(t)$.
F est l'image de f.
f est l'original de F.
Rq : Si f est paire ou impaire, transformer l'exponentielle en cosinus et sinus pour un calcul plus rapide ! !

1.1 Condition suffisante d'existence

Si $H(t)f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, fonction localement sommable sur $\mathbb{R}$ et $\exists M, t_0, \gamma$ tel que

$$\forall t \geq t_0 \quad |f(t)| \leq Me^{\gamma t}$$

Alors $L[f]$ existe et $x_0 \leq \gamma$. On dit que f est d'ordre exponentiel γ quand t tend vers $+\infty$.

1.2 Linéarité

$$L[af_1 + bf_2](p) = aL[f_1](p) + bL[f_2](p) \quad x_0 = sup(x_1, x_2)$$

1.3 Translation en t

(formule du retard)

$$L[H(t-a)f(t-a)](p) = e^{-ap}L[H(t)f(t)](p) \quad Re(p) \geq x_0$$

1.4 Translation en p

(translation de l'image)

$$L[e^{at}f(t)](p) = L[f(t)](p-a) \quad Re(p) \geq x_0 + Re(a)$$

1.5 Changement d'échelle

(dilatation ou contraction)

$$L[H(\frac{t}{a})f(\frac{t}{a})](p) = |a|L[H(t)f(t)](ap) \quad \begin{cases} x > \frac{x_0}{a} & si\, a > 0 \\ x < \frac{x_0}{a} & si\, a < 0 \end{cases}$$

1.6 Dérivation de la transformée

Si f admet TL avec x_0, alors elle est infiniment dérivable sur $Re(p) = x > x_0$ et

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{dp}^n} L[f](p) = L[(-t)^n f(t)](p) \quad Re(p) = x > x_0$$

1.7 Transformée de la dérivée

Si f C^k d'ordre exponentiel γ et admet TL alors

$$L[f^{(n)}](p) = p^n L[f](p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0^+) \quad Re(p) > x_0$$

Pour la première dérivée, on a :

$$L[f'](p) = pL[f](p) - f(0^+) \quad Re(p) > x_0$$

1.8 Primitivation de la transformée

Si f admet TL et $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existe alors

$$L[\frac{f(t)}{t}](p) = \int_p^\infty L[f](p')\mathrm{d}p' \quad Re(p) > x_0$$

1.9 Transformée de la primitivelim

Si f et $\int_0^t f(u)\mathrm{d}u$ admettent TL alors

$$L[\int_0^t f(u)\mathrm{d}u](p) = \frac{1}{p} L[f](p) \quad Re(p) > sup(0, x_0)$$

2 Tranformées de Laplace usuelles

Fonction	Transformée de Laplace	Abscisse de convergence
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$Re(a)$
$sin(at)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\|Im(a)\|$
$cos(at)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\|Im(a)\|$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	0
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$\|Im(a)\|$
$sh(at)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\|Re(a)\|$
$ch(at)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\|Re(a)\|$
t^a $Re(a) > -1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$	0

3 Règles de calcul

f et g de TL F et G d'abscisses de convergence x_0 et x'_0.

Fonction	Transformée de Laplace	Abscisse de convergence
$f(kt)$	$\frac{1}{p}F(\frac{p}{k})$	kx_0
$e^{at}f(t)$	$F(p-a)$	$x_0 - Re(a)$
$f(t-t_0)$	$e^{-pt_0}F(p)$	x_0
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$	x_0
$f \star g$	$F(p)G(p)$	$sup(x_0, x'_0)$
f'	$pF(p) - lim_{0^+} f$	x_0
$\int_0^t f(t')\mathrm{d}t'$	$\frac{F(p)}{p}$	$max(0, x_0)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_x^{+\infty} F(u)\mathrm{d}u$	$x > x_0$

4 Propriétés

Si les limites de f existent et sont finies on a :

$$\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty F(u)\mathrm{d}u$$

$$\lim_{0^+} f(t) = \lim_{+\infty} pF(p)$$

$$\lim_{+\infty} f(t) = \lim_{0^+} pF(p)$$

$$\lim_{Re(p)\to+\infty} F(p) = 0$$

5 Inversion

Pour inverser la transformée de Laplace, on utilise en général les tables et les règles précédentes, en lisant de droite à gauche. Par exemple, pour le calcul de l'inverse de la transformée de Laplace d'une fraction rationnelle, on décompose, et on cherche dans les tables.

$$H(t)f(t) = L^{-1}[F(p)](t)$$

On dispose aussi du théorème de la formule d'inversion e Bromvitch pour inverser la transformée de Laplace, à l'aide du théorème des résidus :

Soit $F(p) = F(\alpha + i\beta)$, analytique pour $x > x_0$, une fonction sommable en β, pour tout $x > x_0$. Alors F est une transformée de Laplace, dont l'original est donné par : $f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} F(p)e^{pt}\mathrm{d}\beta$.

6 Convolution

Si f et g admettent TL avec x_0 et x_0' alors

$$L[f \star g] = L[f](p)L[g](p) \quad Re(p) > sup(x_0, x_0')$$

7 Cas des fonctions périodiques

Soit f T-périodique bornée sur $\mathbb{R}^+$ de génératrice f_T sur $[0, T[$, on a :

$$H(t)F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_T(t - nT)$$

On utilise la linéarité, la translation, l'exponentielle et la convergence pour obtenir :

$$L[f](p) = \frac{F_T(p)}{1 - e^{-pt}} = \frac{1}{1 - e^{-pt}} \int_0^T f_T(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

8 Résolution d'équation différentielle

A partir de $\sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}(t) = \varphi(t)$, on pose $G(p) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} a_k p^k}$ et $F_h(p) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l=0}^{k-1} p^{k-l-1} f^{(l)}(0)$ on a $F(p) = G(p)\Phi(p) + G(p)F_h(p)$.

où $G(p)$ et la fonction de Green, fonction de transfert (ou son inverse).

Finalement on obtient : $f(t) = H(t)g(t) \star H(t)\varphi(t) + L^{-1}[GF_h](t)$ (solution homogène + solution particulière)

Rq : Sert aussi pour les équations fonctionnelles, les intégrales convolutives, etc...