Transformée de Fourier

M. CHATEAU David

15/05/2010

Résumé

Mémento sur la transformée de Fourier

Table des matières

1 Espaces **3**

2 Transformation de Fourier **3**

3 Propriétés **4**

4 Inversion **5**

5 Théorème de Parseval-Plancherel **5**

6 Convolution **6**

7 Corrélation **6**

8 Intégrales et sommes **6**

9 Fonction de Dirac **7**

10 TF à plusieurs variables **7**

11 Incertitude **7**

1 Espaces

CM_T fonctions continues par morceaux périodique de période T (séries)
$L^p[a,b]$ espace tel que $\int_a^b |f(t)|^p \, \mathrm{d}t < +\infty$
$L^p(\mathbb{R})$ espace tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p \, \mathrm{d}t < +\infty$
$L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ espace des fonctions sommables et de carré sommable
$S(\mathbb{R})$ espace de Schwarz (Stable par TF !) :
e.v. sur $\mathbb{C}$ des fonctions C^∞ à décroissance rapide à tout ordre. (idéal)
On a $L^2 \subset L^1$, $S \subset L^p$
Rq : savoir fonctions porte Π, heaviside H, gaussienne, sinus cardinal, dirac...
Rq : $[a,b]$ est un intervalle borné.

2 Transformation de Fourier

C'est la généralisation des séries de Fourier aux fonctions non périodiques.
Attention, deux fonctions égales presque partout ont la même TF ! !
Transformée de Fourier : fonction

$$F[f] : \mathbb{R} \quad \to \quad \mathbb{C} : u \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi ut} \mathrm{d}t$$

Transformée de Fourier inverse : fonction

$$\overline{F}[f] : \mathbb{R} \quad \to \quad \mathbb{C} : u \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{+i2\pi ut} \mathrm{d}t$$

Rq : Si f est paire ou impaire, transformer l'exponentielle en cosinus et sinus pour un calcul plus rapide ! !

$$F[f](0) = \overline{F}[f](0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t$$

Généralisation :
On peut passer du domaine temporel au domaine fréquentiel par la transformée de Fourier (TF) définie par :

$$TF(f(x,t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t) \, e^{-i(\omega t - kx)} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = F(k,\omega)$$

L'opération inverse est réalisée par la transformée de Fourier inverse :

$$TF(F(k,\omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k,\omega) \, e^{+i(\omega t - kx)} \mathrm{d}k \, \mathrm{d}\omega = f(x,t)$$

3 Propriétés

Attention, de façon générale il faut être prudent car on a seulement des conditions nécessaires non suffisantes pour l'existence de la TF.

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors f admet une TF $F[f]$ C^0 sur $\mathbb{R}$ et $lim_{u\to+\infty}F[f](u) = 0$
Donc, toute fonction bornée sur un intervalle borné admet une TF.

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $fF[g], F[f]g \in L^1(\mathbb{R})$ (Formule d'échange)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F[f](x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)F[g](x)\mathrm{d}x$$

Rq : Valables aussi pour $\overline{F}$.

F est linéaire et conserve la parité de f.
Si f paire $F[f] = \overline{F}[f]$ et si f impaire $F[f] = -\overline{F}[f]$

On a $F[\overline{f}](u) = \overline{F[f](-u)}$ et $\overline{F}[f](u) = F[f](-u)$

(décalage $\to$ modulation) $\quad \tau_\beta f(t) = f(t-\beta)$

$$F[\tau_\beta f](u) \quad = \quad e^{-i2\pi u\beta}F[f](u)$$

($modulation \to décalage$) $\quad \nu_0 f(t) = e^{+i2\pi\nu_0 t}f(t)$ (exp = facteur de phase)

$$F[\nu_0 f](u) \quad = \quad F[f](u-\nu_0)$$

(changement d'échelle) $\quad D_a f(t) = f(\frac{t}{a})$ (contraction ou dilatation)

$$F[D_a f](u) \quad = \quad |a|F[f](au)$$

(dérivation) Si $f \in (C^n \cap L^1(\mathbb{R}))$ et $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}) \forall k \leq n$ (donc ok si $f \in S(\mathbb{R})$) alors,

$$F[f^{(k)}](u) \quad = \quad (i2\pi u)^k F[f](u)$$

et donc $(2\pi u)^k \left|F[f](u)\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(t)|\mathrm{d}t$
démo : $k = 1$ par IPP puis récurrence.

(dérivation bis) Si $t^k f \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall k \leq n$ (donc ok si $f \in S(\mathbb{R})$) alors, $F[f] \in C^n$ et

$$F[f]^{(k)}(u) \quad = \quad (-i2\pi)^k F[t^k f](u)$$

et donc $\left|F[f]^{(k)}(u)\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |t^k f(t)|\mathrm{d}t$

4 Inversion

Dans $L^1(\mathbb{R})$, Th de réciprocité :
Si f et $F[f]$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ alors $\overline{F}[F[f]](t) = f(t)$ en tout point où f est continue.

Dans $L^1(\mathbb{R})$, Th d'inversion locale :
Si f continue par morceaux est dans $L^1(\mathbb{R})$ alors $lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{+A} F(u)e^{+i2\pi ut}\mathrm{d}u = \widetilde{f}(t)$. (régularisée de f)

Dans $L^2(\mathbb{R})$:
Si f est dans $L^2(\mathbb{R})$ alors $\overline{F}[F[f]](t) = F[\overline{F}[f]](t) = f\ p.p.$

Dans $S(\mathbb{R})$: TF est alors une application linéaire bijective de $S(\mathbb{R})$ dans $S(\mathbb{R})$.
Si f est dans $S(\mathbb{R})$ alors $\overline{F}[F[f]](t) = F[\overline{F}[f]](t) = f$

5 Théorème de Parseval-Plancherel

f et g dans $L^2(\mathbb{R})$ alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F[f](u)}F[g](u)\mathrm{d}u$$

d'où pour $f = g$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |F[f](u)|^2\mathrm{d}u \quad \text{cad} \quad ||f||_2 = ||F[f]||_2$$

Rq : conservation de l'énergie car intégrale de la densité temporelle ou spectrale d'énergie.
Rq : plus f est étroite, plus $F[f]$ est large car principe d'incertitude.
Rq : isométrie sur $L^2(\mathbb{R})$

6 Convolution

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)\mathrm{d}u$$

Produit de convolution commutatif et linéaire.

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\exists f \star g$ p.p. et $f \star g \in L^1(\mathbb{R})$. De plus, $\star$ associatif.
Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ alors $\exists f \star g$ mais $f \star g \notin L^2(\mathbb{R})$ en général.
Si $f, g \in S(\mathbb{R})$ alors $\exists f \star g$ et $f \star g \in S(\mathbb{R})$.

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et g admet des dérivées bornées jusqu'à l'ordre k,
alors $\forall p \leq k$ on a $(f \star g)^{(p)} = f \star g^{(p)}$

Si f, g admettent une TF tel que $f \star g$ existe et est sommable
alors $F[f \star g] = F[f]F[g]$ et $F[fg] = F[f] \star F[g]$

7 Corrélation

$$(f \circ g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\overline{g(u-t)}\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+u)\overline{g(u)}\mathrm{d}u$$

Produit de corrélation pas commutatif. C'est un « produit de convolution particulier » : $f \circ g = f \star \overline{\check{g}}$
On a $F[f \circ g] = F[f]\overline{F[g]}$

Si $f = g$, autocorrélation, défini si f appartient à $L^2(\mathbb{R})$.
On a alors $F[f \circ f](u) = |F[f]|^2(u)$ et $(f \circ f)(-u) = \overline{(f \circ f)(u)}$ (hermitienne)
et si f réelle, $(f \circ f)$ est réelle paire et $|(f \circ f)(t)| \leq (f \circ f)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$
Celà traduit la conservation de l'énergie du signal.

8 Intégrales et sommes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (sinc\, x)^2 \mathrm{d}x = \pi$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

9 Fonction de Dirac

En vrai, on devrait parler de distribution de Dirac. C'est une impulsion très brève, un point lumineux.

δ est l'élément neutre de la convolution.

$$\delta(t) = lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(t) \quad \text{où} \quad \delta_e(t) = \frac{1}{\epsilon}\Pi(\frac{t}{\epsilon})$$

On a

$$F[\delta_a](u) = e^{-i2\pi ua} \quad \delta_a(t) = \delta(t-a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i2\pi u(t-a)} \mathrm{d}u \quad F[F[f]](u) = f(-u)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) \mathrm{d}t = f(0) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) f(t) \mathrm{d}t = f(a)$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \quad f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a)$$

10 TF à plusieurs variables

On généralise sans difficultés à plusieurs variables.

$$L^1(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} / \int_{\mathbb{R}^n} |f(\overrightarrow{x})| \mathrm{d}^n \overrightarrow{x} < \infty\}$$

$$F[f](\overrightarrow{u}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\overrightarrow{x}) e^{-i2\pi \overrightarrow{u}.\overrightarrow{x}} \mathrm{d}^n \overrightarrow{x}$$

La plupart des propriétés se généralisent facilement.
On peut aussi appliquer ceci à des champs de vecteurs.
Rq : Table disponible sur le site.
Rq : Attention deux fonctions égales presque partout ont la même TF...

11 Incertitude

$$\Delta_t \Delta_\nu \geq \frac{1}{4\pi} \quad \Delta_x \Delta_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

où Δ représente l'écart quadratique moyen.
En physique quantique, la densité de probabilité est représentée par $|\Psi(x,t)|^2$.