Formules de Taylor

M. CHATEAU David

09/06/2009

Résumé

Les formules de Taylor !

Table des matières

1 Taylor-Young

Utile à l'obtention de DL, formule *locale*.

1.1 Expression avec (x-a)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \epsilon(x-a)$$

$$f(x) = f(a) + (x-a) f^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \epsilon(x-a)$$

$$avec \ \lim_{x \to a} \epsilon(x-a) = 0$$

1.2 Expression avec h

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + h^n \epsilon(h)$$

$$f(a+h) = f(a) + (h) f^{(1)}(a) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(a) + ... + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + h^n \epsilon(x-a)$$

$$avec \ \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$$

2 Taylor-Langrange

Utile à la majoration. Formule *globale*.

2.1 Expression avec (x-a)

$$\forall a, x \in \mathbb{R},\ \exists c \in]a; x[\ tq$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$f(x) = f(a) + (x-a) f^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

2.2 Expression avec h

$$\forall h \in \mathbb{R},\ \exists \theta \in]0; 1[\ tq$$

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h)$$

$$f(a+h) = f(a) + h f^{(1)}(a) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(a) + ... + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h)$$

3 Taylor reste intégral

Généralisation par récurrence du théorème fondamental du calcul intégral.

3.1 Expression avec (x-a)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

$$f(x) = f(a)+(x-a)f^{(1)}(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

3.2 Expression avec h

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^{a+h} \frac{(a+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

$$f(x) = f(a)+(x-a)f^{(1)}(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\int_a^{a+h} \frac{(a+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

4 Remarques

4.1 Passage d'une forme à l'autre

On passe facilement d'une expression à l'autre en posant le changement de variable $x - a = h$.

4.2 Polynôme de Taylor

Le polynôme suivant est appelé polynôme de Taylor.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

4.3 Autre forme du reste intégral

Par le changement de variable $h \to a + th$, on a :

$$\int_a^{a+h} \frac{(a+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a+th)\,dt$$

4.4 Fonction epsilon

Par identification, on a :

$$\epsilon(h) = \frac{h}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a+th)\,dt$$