Séries de Fourier

M. CHATEAU David

15/05/2010

Résumé

Mémento sur les séries de Fourier

Table des matières

1 Théorème de Dirichlet **3**

2 Coefficients de Fourier **3**

3 Egalités de Bessel et Parseval **4**

4 Produit de convolution **4**

5 Corrélation périodique **4**

1 Théorème de Dirichlet

Soit f C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, T périodique.
Alors $SF(f)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme :

$$SF(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{+in\omega t} = \frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)] = \widetilde{f}(t) \quad \text{régularisée de f}$$

$$SF(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(f)cos(n\omega t) + b_n(f)sin(n\omega t)] = \frac{1}{2}[f(t^+)+f(t^-)] = \widetilde{f}(t) \quad \text{régularisée de f}$$

$$SF(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [D_n(f)cos(n\omega t + \varphi_n)] = \frac{1}{2}[f(t^+)+f(t^-)] = \widetilde{f}(t) \quad \text{régularisée de f}$$

où $D_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \varphi_n = Arctan(\frac{b_n}{a_n})$

Rq : D'où les spectres de fréquences bilatéral, unilatéral, et de puissance. On peut y rajouter un spectre de phase.

2 Coefficients de Fourier

Soit f continue par morceau de période T.

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-in\omega t}\mathrm{d}t$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_T f(t)\, cos(n\omega t)\, \mathrm{d}t \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_T f(t)\, sin(n\omega t)\, \mathrm{d}t$$

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

$$c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$$

$$c_n(\check{f}) = c_{-n}(f) \quad \check{f}(t) = f(-t)$$

$$c_n(\tau_\beta f) = e^{-in\omega\beta}c_n(f) \quad \tau_\beta f(t) = f(t-\beta)$$

Rq : poser $t - \beta = u$ puis $\int_a^{a+T}$ indépendant de a.

$$c_n(f^{(k)}) = (in\omega)^k c_n(f)$$

Méthode : Regarder la parité de la fonction. Si paire ou impaire, calculer a_n ou b_n, sinon calculer c_n.

Rq : On a toujours $b_0 = 0$

3 Egalités de Bessel et Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\overline{c_n(g)} = \frac{1}{T}\int_T f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t = \frac{a_0(f)\overline{a_0(g)}}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n(f)\overline{a_n(g)} + b_n(f)\overline{b_n(g)}\right]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T}\int_T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right]$$

Rq : conservation de l'énergie, puissance.

4 Produit de convolution

$$(f \star g)(t) = \frac{1}{T}\int_T f(u)g(t-u)\mathrm{d}u \quad \text{(commutatif)}$$

$$c_n(f \star g) = c_n(f)c_n(g)$$

5 Corrélation périodique

$$(f \circ g)(t) = \frac{1}{T}\int_T f(u)\overline{g(u-t)}\mathrm{d}u = \frac{1}{T}\int_T f(t+u)\overline{g(u)}\mathrm{d}u \quad \text{(pas commutatif)}$$

$$c_n(f \circ g) = c_n(f)\overline{c_n(g)}$$

$$c_n(f \circ f) = |c_n(f)|^2 \quad \text{(autocorrélation)}$$