Séries

M. CHATEAU David

14/12/2009

Résumé

Rappels sur les séries (pas les suites !)

Table des matières

1 Séries numériques **3**
1.1 Définition . . . 3
1.2 Séries de référence . . . 3
1.3 Premier test - Terme général . . . 3
1.4 Second test - Convergence absolue . . . 3
1.5 Critère spécial des séries alternées . . . 3
1.6 Pour les STP . . . 3
1.6.1 Théorème de l'équivalent . . . 3
1.6.2 Théorèmes de comparaison . . . 4
1.6.3 Critères de Cauchy (et d'Alembert) . . . 4
1.6.4 Comparaison à une intégrale . . . 4

2 Séries entières **4**
2.1 Définition . . . 4
2.2 Théorème d'Abel . . . 4
2.3 Développement en série entière d'une fonction . . . 4
2.4 Séries entières usuelles . . . 5
2.5 Utilisation de la double factorielle . . . 5

1 Séries numériques

Le problème est la convergence et son rayon. Seul ce qui se passe à l'infini est important !

1.1 Définition

$$S_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$$

1.2 Séries de référence

$$\sum a^n \; CV \Leftrightarrow |a| < 1$$

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \; CV \Leftrightarrow \alpha > 1$$

1.3 Premier test - Terme général

$$\lim_{n \to \infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \text{la série DV}$$

1.4 Second test - Convergence absolue

$$ACV \Rightarrow CV$$

1.5 Critère spécial des séries alternées

$$\text{Si } u_n = (-1)^n a_n \quad \text{avec} \quad (a_n) \searrow_0 \; \text{(à partir d'un certain rang)} \quad \text{alors} \quad S_n \; CV$$

Le reste est alors majoré par a_{n+1}.

1.6 Pour les STP

1.6.1 Théorème de l'équivalent

$$u_n \sim v_n \Rightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ de même nature (CV/DV)}$$

Rem : $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$

1.6.2 Théorèmes de comparaison

Les mêmes que pour les suites. On compare deux suites entre elles, ou alors à une suite de référence, ou encore à $n^\alpha u_n$.

1.6.3 Critères de Cauchy (et d'Alembert)

$$\sqrt[n]{u_n} \to l \quad \text{ou} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l < 1 & CV \\ l = 1 & ? \\ l > 1 & DV \end{cases}$$

1.6.4 Comparaison à une intégrale

Si $u_n = f(n)$ positive décroissante à partir d'un certain rang alors $\sum^\infty u_n$ et $\int^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

2 Séries entières

2.1 Définition

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad R = \frac{1}{l}$$

Continue, dérivable, intégrable sur son domaine ou disque de convergence.

On appelle alors $\sum_{n=0}^{p} a_n x^n$ la somme partielle et $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n x^n$ le reste d'ordre n.

2.2 Théorème d'Abel

$$\sum u_n\, CV \text{ en } x_0 \Rightarrow \forall x \text{ tel que } |x| < |x_0| \text{ alors } \sum u_n\, CV$$

2.3 Développement en série entière d'une fonction

Il faut f C^∞ sur $]-R, R[$ et $|f^{(n)}(x)| < M$ $\forall n$, $\forall x \in]-R, R[$. Alors :

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0)$$

2.4 Séries entières usuelles

Voir fiche sur les DL.
Pour $exp(x)$, $sin(x)$, $cos(x)$, $sh(x)$, $ch(x)$: $R = +\infty$
Pour $ln(1+x)$, $\frac{1}{1-x}$,$Arctan(x)$: $R = 1$
Pour $(1+x)^\alpha$: $R = 1$ si α non entier. Sinon $R = +\infty$

2.5 Utilisation de la double factorielle

Pour $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = \pm\frac{1}{2}$
$\frac{(\frac{-1}{2})(\frac{-1}{2}-1)(...)(\frac{-1}{2}-(n-1))}{n!} = (-1)^n \frac{1*3*5*...*(2n-1)}{2^n*n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$