Questions de cours en Maths filière S – Classe de première

(a,b,c,k,λ,x,y sont des réels ; z est un complexe ; f,g,u,v sont des fonctions ; u_n,v_n sont des suites)
(u(a,b) et v(c,d) sont des vecteurs ; (d) une droite ; les repères sont supposés orthonormés ; X une variable aléatoire)

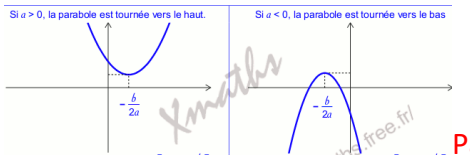
ANALYSE

Calcul

1) Donner les 3 identités remarquables.
   $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
2) Résoudre x^2=a. $x = \pm\sqrt{a}$ Compléter : $\sqrt{a^2} = |a|$
3) Écrire avec un seul exposant, c'est-à-dire sous la forme $x^{\cdots\cdots}$:
   $x^a x^b = x^{a+b}$ $\quad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ $\quad (x^a)^b = x^{ab}$ $\quad \sqrt{x} = x^{1/2}$ $\quad \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$

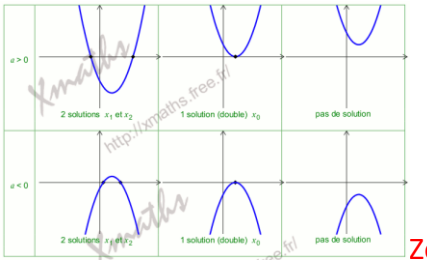
Second degré

1) Forme développée du polynôme de degré 2 (trinôme) ? $ax^2 + bx + c$
2) Le représenter graphiquement pour a>0 et pour a<0 en indiquant l'abscisse du sommet.



Parabole dont le sommet a -b/2a pour abscisse.

3) Combien de fois le trinôme peut-il s'annuler ? Expliquer graphiquement.



Zéro, une ou deux fois.

4) Forme canonique du trinôme ? $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$
5) Expression du discriminant et des racines du trinôme ? $\Delta = b^2 - 4ac$
6) Qu'est-ce qu'une racine du trinôme ? Si a est racine alors le trinôme est nul en $x = a$.
7) Soit un trinôme ayant pour racines z_1 et z_2, comment le factoriser ? $a(x-z_1)(x-z_2)$
   De façon générale, si a est racine d'un polynôme, on peut factoriser par $(x-a)$.
8) Signe du trinôme ? (3 cas) Le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines.
9) Somme des racines ? Produit des racines ? Equation équivalente ?
   $S = x_1 + x_2$ $\quad P = x_1.x_2$ $\quad x^2 - Sx + P = 0$

Fonctions

1) Tracer les fonctions ax+b , x^2 , $\sqrt{x}$, 1/x et |x|. Vérifier sur calculatrice.
2) DEMO : Démontrer que $\sqrt{x}$ est croissante sur R^+. Voir avec prof.
3) DEMO : Justifier les positions relatives de x, x^2 et $\sqrt{x}$ Voir avec prof.
4) Donner l'inégalité triangulaire. $|a+b| \leq |a| + |b|$
5) Soit u croissante (resp. décroissante), comment varient : u+k, λ*u, $\sqrt{u}$ et 1/u ?
   croissante, croissante si $\lambda > 0$, croissante, décroissante.
6) Donner l'équation de la tangente à f(x) en x=a. $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Dérivation

1) (a)'= 0 $(x^n)' = nx^{n-1}$ (ku)'=ku' (u+v)' =u'+v'
   (u*v)'= u'v+v'u (u/v)'=(vu'-uv')/v^2 (1/u)'=-u'/u^2 $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
2) Comment repérer un extrémum (min ou max) ? La dérivée s'annule en changeant de signe.
3) Quel est le lien entre la dérivée et le sens de variation de la fonction ?
   Dérivée positive = Fonction croissante ; Dérivée négative = Fonction décroissante
4) Quel est le lien entre fonction continue et fonction dérivable ?
   Dérivable ⇒ Continue

Suites

1) Suites arithmétiques : relation de récurrence, terme général, relation entre deux termes u_n et u_p.
   $u_{n+1} = u_n + r$ $u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_p + (n-p)r$
2) Suites arithmétiques : somme de N termes consécutifs, sens de variation, limite.
   $$S_n = Nombre\ de\ termes * Moyenne\ des\ extrêmes$$
   Si $r > 0$, (u_n) croissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; Si $r = 0$, (u_n) est constante ; Si $r < 0$, (u_n) décroissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
3) Suites géométriques : relation de récurrence, terme général, relation entre deux termes u_n et u_p.
   $u_{n+1} = u_n * q$ $u_n = u_0 * q^n$ $u_n = u_p + q^{n-p}$
4) Suites géométriques : somme de N termes consécutifs, sens de variation, limite de q^n.
   $$S_n = 1^{er} terme * \frac{1 - q^{Nombre\ de\ termes}}{1-q}$$
   Si $q > 1$, (u_n) est croissante, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
   Si $q = 1$, (u_n) est constante, $\lim_{n\to+\infty} u_n = u_0$
   Si $0 < q < 1$, (u_n) est décroissante, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
   Si $q = 0$, (u_n) est nulle, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
   Si $-1 < q < 0$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
   Si $q = -1$, (u_n) n'a pas de limite, elle est alternée.
   Si $q \leq -1$, (u_n) n'a pas de limite.

   De façon simplifiée :
   Si $q > 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
   Si $q = 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = u_0$
   Si $-1 < q < 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
   Si $q \leq -1$, (u_n) n'a pas de limite
5) Comment étudier une suite ? (4) ; Comment lever une indéterminée ? (3)
   Comparer $u_{n+1} - u_n$ à 0 ; Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (si positif) ; récurrence ; étudier $u_n = f(n)$
   Factoriser par le terme dominant ; multiplier par la quantité conjuguée ; (ou taux d'accroissement)
6) DEMO : Établir les formules donnant 1+2+…+n et 1+q+q^2+…+q^n
   Voir avec prof pour la démo ; $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

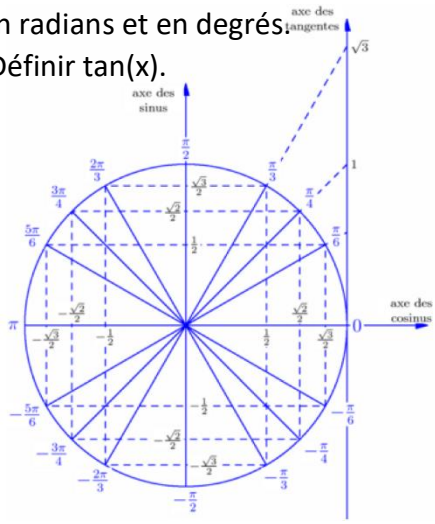
GEOMÉTRIE

Géométrie plane

1) Donner la relation de Chasles. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
2) Donner une condition vectorielle telle que ABCD soit un parallélogramme. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
3) Donner une condition vectorielle telle que I soit le milieu de AB. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
4) Donner une condition vectorielle telle que G soit le centre de gravité de ABC.
   $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ avec I le milieu de BC
5) Qu'est-ce que deux vecteurs colinéaires ? $\vec{u} = k\vec{v}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction.
6) Donner la condition de colinéarité de deux vecteurs. Si $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ alors $xy' - yx' = 0$
7) Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$? En déduire la longueur AB ?
   $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$ et $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
8) Soit le vecteur $\vec{u}$(a,b) vecteur directeur de la droite (d) passant par le point M(x_M,y_M), donner l'équation cartésienne de (d). $y - y_M = \frac{b}{a}(x - x_M)$
9) Soit la droite (d) : ax+by+c=0, donner un vecteur directeur de (d). $\vec{u}(b; -a)$

Trigonométrie

1) Construire le cercle trigonométrique en indiquant les angles particuliers en radians et en degrés.
   On indiquera également les valeurs des sinus et cosinus correspondants. Définir tan(x).
   $360° = 2\pi\, rad.$ et $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$



2) Résoudre dans R les équations suivantes : cos(x)=cos(a) et sin(x)=sin(a).
   $\begin{cases} x = +a + 2k\pi \text{ avec } k \in Z \\ x = -a + 2k\pi \text{ avec } k \in Z \end{cases}$; $\begin{cases} x = a + 2k\pi \text{ avec } k \in Z \\ x = \pi - a + 2k\pi \text{ avec } k \in Z \end{cases}$
3) Quel est l'angle entre deux vecteurs colinéaires ? 0° ou 180°
   Entre deux vecteurs orthogonaux ? 90°
4) sin(x+pi/2) =-cos(x) sin(pi/2-x) =cos(x)
   sin(x+pi) =-sin(x) sin(pi-x) =sin(x)
5) cos(x+pi/2) =sin(x) cos(pi/2-x) =sin(x)
   cos(x+pi) =-cos(x) cos(pi-x) =-cos(x)
6) cos(a+b)=cos(a)cos(b)-sin(a)sin(b) cos(a-b)=cos(a)cos(b)+sin(a)sin(b)
   sin(a+b)=sin(a)cos(b)+sin(b)cos(a) sin(a-b)= sin(a)cos(b)-sin(b)cos(a)
7) cos(2a)=$\cos^2$a-$\sin^2$a=2$\cos^2$a-1=1-2$\sin^2$a sin(2a)=2sin(a)cos(a) $\cos^2$a+$\sin^2$a=1

Produit scalaire dans le plan

1) Quel est le produit scalaire de $\vec{u}$(x,y) et $\vec{v}$(x',y') ? Quelle est la norme de u ?
   $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$ $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
2) Quel est le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sachant que l'angle ($\vec{u}$,$\vec{v}$)=α ? $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$
3) Le produit scalaire est-il commutatif ? oui, $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
   Fonctionne-t-il avec les identités remarquables ? oui, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ etc
4) Donner la « troisième expression » du produit scalaire. $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$
   Donner la « quatrième expression » aussi. $\vec{u}.\vec{v} = \frac{-1}{2}[\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$
5) Soit M(x_M,y_M) et $\vec{u}$(a,b), quelle est l'équation de la droite passant par M et de vecteur normal $\vec{u}$?
   $a(x - x_M) + b(y - y_M) = 0$ (à retrouver en posant un produit scalaire nul).
6) Soit la droite (d) : ax+by+c=0, déterminer un vecteur normal à (d). $\vec{u}(a; b)$

7) DEMO : Soit le cercle de centre C(x_C,y_C) et de rayon R, déterminer l'équation du cercle.

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$$

8) DEMO : Soit le cercle de diamètre AB, déterminer l'équation du cercle.

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ donc $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$

9) DEMO : Démontrer que cos(a-b)=cos(a)cos(b)+sin(a)sin(b) Voir avec prof.

10) Dans quels cas le produit scalaire de deux vecteurs est nul ?

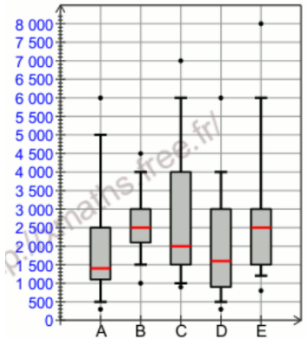
Quand les vecteurs sont orthogonaux (ou qu'un des vecteurs est le vecteur nul).

11) Soient A et B deux points et I le milieu de [AB]. Quelle égalité sur les distances peut-on écrire pour tout point M ? $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

STATISTIQUES

Statistiques descriptives

1) Définir : moyenne, médiane, variance, écart-type, fréquence.
   Soit x_i la valeur, n_i l'effectif (ou coefficient) et f_i la fréquence. Moyenne $\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \sum f_i x_i = E(x)$
   Variance = moyenne des carrés des écarts à la moyenne. $Var(x) = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum n_i} = E(x^2) - E(x)$
   Écart-type : $\sigma(x) = \sqrt{Var(x)}$
   La médiane est la plus petite valeur de la série qui la partage en deux groupes de même effectif.
2) Définir : premier quartile, troisième quartile, écart interquartile.
   Le premier quartile est la plus petite valeur Q1 de la série pour laquelle au moins 25% des données sont inférieures à Q1.
   Le troisième quartile est la plus petite valeur Q3 de la série pour laquelle au moins 75% des données sont inférieures à Q3.
   L'écart interquartile est le nombre Q3-Q1.
3) Définir : premier décile, neuvième décile, écart interdécile.
   Le premier décile est la plus petite valeur D1 de la série pour laquelle au moins 10% des données sont inférieures à D1.
   Le neuvième décile est la plus petite valeur D9 de la série pour laquelle au moins 90% des données sont inférieures à D9.
   L'écart interdécile est le nombre D9-D1.
4) Rappeler les règles de construction d'un diagramme en boîte.
   Les points sont le MIN et le MAX.
   Les traits vont de D1 à D9.
   La boîte va de Q1 à Q3.
   Le trait représente la médiane.



Probabilités

1) Expliquer et définir ces symboles : Ω et ∅.
   L'univers (événement certain) et l'ensemble vide (événement impossible).
2) P(Ω)=1 P(∅)=0 P($\overline{A}$)=1-P(A) P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A∩B)
   card(AUB)=card(A)+card(B)-card(A∩B)
3) Quelles sont les valeurs possibles pour P(A) ? Entre 0 et 1.
4) Définir card(A) Nombre d'éléments dans A. En déduire une expression de $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$.
5) Que dire si A et B sont incompatibles (terme à définir) ? Dans ce cas, exprimer P(AUB).
   $P(A \cap B) = 0$ donc $P(AUB) = P(A) + P(B)$
6) Que dire si A et B sont indépendants (terme à définir) ? Dans ce cas, exprimer P(A∩ B)
   On a $P_A(B)=P(B)$ et $P_B(A)=P(A)$ avec P(A) et P(B) non nuls.
   P(A∩B)=P(A)*P(B)
7) Quel lien existe-t-il entre incompatibles et indépendants ?
   2 événements incompatibles ne sont jamais indépendants.
8) Qu'est-ce qu'une partition de l'univers ?
   Un ensemble d'événements A_i tel que $\sum_i A_i = \Omega$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ (utile pour probas totales en TS)
9) Définir : espérance, variance (2 expressions), écart-type
   $E(X) = \sum_i x_i\, p(X = x_i)$ $V(X) = \sum_i \left(x_i - E(X)\right)^2 p(X = x_i) = E(X^2) - E(X)^2$ $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
10) E(aX+b) = aE(X)+b V(aX+b)=a^2V(x) $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$
11) Qu'est-ce qu'une épreuve de Bernoulli ? Une expérience aléatoire à deux issues (succès/échec).
12) Qu'est-ce qu'un schéma de Bernoulli ?
    C'est la répétition de façon indépendante de plusieurs épreuves de Bernoulli.
13) Énoncer la loi binomiale. Quel est son lien avec le schéma de Bernoulli ? Interpréter chaque terme.
    La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli suit la loi

Binomiale B(n,p) de paramètres n (nombre de répétition de l'expérience) et p (probabilité du succès lors d'une expérience). La probabilité d'obtenir au total k succès est alors :

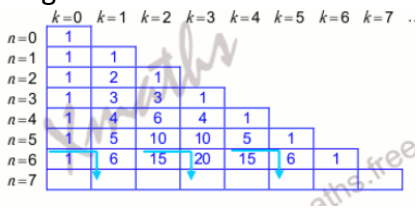
$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

1er terme : nombre de chemins possibles ; 2nd terme : succès ; 3ème terme : échecs.

14) Que sont les coefficients binomiaux ? Comment les retrouver à l'aide du triangle de Pascal ?

C'est le nombre de combinaison, nombre de chemins possibles.

On additionne les deux chiffres sur la flèche bleue pour trouver celui au bout.



15) Donner l'espérance, la variance et l'écart-type de la loi binomiale B(n,p).

E(X)=np V(X)=np(1-p) $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

16) Démontrer que $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k+1}$ Voir avec prof

17) $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$

18) Donner les valeurs de : $\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{1}=n$, $\binom{n}{n-1}=n$, $\binom{n}{n}=1$

Échantillonnage

1) On considère un caractère ayant une proportion $p\in[0{,}2\,;0{,}8]$ dans une population.
On considère un échantillon de taille $n\geq 25$. Donner alors l'intervalle de fluctuation à 95%.

$$\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

2) L'intervalle de fluctuation dans le cadre de la loi binomiale est I=[a/n ; b/n]. Définir a et b.
$p(X\leq a)>2{,}5\%$ et $p(X\leq b)\geq 97{,}5\%$

3) On considère que la probabilité d'un caractère est p. Comment tester cette hypothèse ?
On observe sur un échantillon de taille n la fréquence f de ce caractère.
Si la fréquence observée ne se trouve pas dans l'intervalle de fluctuation, on rejette l'hypothèse.
Sinon, on ne la rejette pas.