Optique géométrique et Ondulatoire

M. CHATEAU David

17/03/2010

Résumé

Formulaire d'optique géométrique et ondulatoire

Table des matières

1 Généralités

1.1 Principe de Fermat / de moindre action de l'optique

$$L(AB) = \int_{AB} n \, \mathrm{d}s = Cte$$

1.2 Déphasage

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \quad p = \frac{\delta}{\lambda}$$

Si en phases, $\varphi = (2k)\frac{\lambda}{2}$
Si en opposition de phases, $\varphi = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$

1.3 Analogie du PFD

$$\frac{\mathrm{d}n\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{grad}\, n$$

1.4 Lois de Snell Descartes pour la réflexion/réfraction

$$i = -r$$

$$n_1 \, sin \, i_1 = n_2 \, sin \, i_2$$

1.5 Condition d'Abbe, stigmatisme entre plans de front

$$n \, y \, sin \, \alpha = n' \, y' \, sin \, \alpha'$$

(à approximer dans Gauss..)

1.6 Condition d'Herschell, stigmatisme entre points sur l'axe

$$n \, sin^2 \frac{\alpha}{2} \, \mathrm{d}x = n' \, sin^2 \frac{\alpha'}{2} \, \mathrm{d}x'$$

(à approximer dans Gauss..)

1.7 Grandissements

$$G_y = G_\alpha G_x$$

1.8 Tracé des rayons

- Le rayon passant par le centre optique n'est pas dévié.
- Le rayon passant par le foyer objet ressort parallèle à l'axe secondaire.
- Le rayon parallèle à l'axe secondaire ressort par le foyer image.
- Les plans principaux H sont tels que le grandissement transversal est unitaire. $G_y = 1$
- Les points nodaux N, sur l'axe optique, sont tels que le grandissement angulaire est unitaire. $G_\alpha = 1$

1.9 Conditions de Gauss

Rayons peu inclinés et proches de l'axe optique.

1.10 Fibre optique

La réflexion totale nécessite qu'on passe d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent ($n_2 < n_1$) et qu'on dépasse l'angle limite.

2 Prisme

$$A = r + r' \quad D = i + i' - A$$

$$n = \frac{sin(\frac{A+D_m}{2})}{sin(\frac{A}{2})}$$

$$\text{Si } A \ll 1, \quad D = (n-1)A$$

Condition d'émergence : $A < 2r_l$

3 Relations générales

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{G_{x_O} x} = \frac{1}{f'}$$

Et pour les systèmes centrés, c'est à dire $G_{y_O} = 1$, car O centre optique : (sinon considérer avec H et H')

$$\frac{n'}{x'} - \frac{n}{x} = \frac{n'}{f'}$$

4 Dioptres (sphérique et plan)

$$\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n'-n}{\overline{SC}} = V \quad \gamma = \frac{n}{n'}\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

$$\frac{n}{\overline{CA'}} - \frac{n'}{\overline{CA}} = \frac{n'-n}{\overline{SC}} = V \quad \gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

$$\overline{FA}\,\overline{F'A'} = \overline{SF}\,\overline{SF'} \quad \gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{SF'}} = -\frac{\overline{SF}}{\overline{FA}}$$

Rq : $V = \frac{n'-n}{\overline{R}}$ où $\overline{R}$ est lié au sens de la lumière incidente.

5 Miroirs (sphérique et plan)

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} \quad \gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

$$\frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}} \quad \gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

$$\overline{FA}\,\overline{F'A'} = \overline{SF}\,\overline{SF'} \quad \gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{SF'}} = -\frac{\overline{SF}}{\overline{FA}}$$

Rq : Comme dioptres avec $n' = -n$.

Rq : Le miroir sphérique n'est pas stigmatique, contrairement aux miroirs parabolique et hyperbolique.

Rq : ATTENTION, l'orientation des longueurs et des angles dépendent de la direction de la lumière !

6 Lentilles minces

$$\frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{1}{\overline{SF'}} \quad \gamma = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

$$\overline{FA}\,\overline{F'A'} = \overline{SF}\,\overline{SF'} \quad \gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{SF'}} = -\frac{\overline{SF}}{\overline{FA}}$$

6.1 Gullstrand & co

$$V = V_1 + V_2 - \frac{eV_1V_2}{n}$$

n indice du milieu entre les lentilles.

$$V = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{SC_g}} - \frac{1}{\overline{SC_d}}\right)$$

6.2 Doublets, occulaires

$$\frac{f'_1}{m} = \frac{e}{n} = \frac{f'_2}{p} = a$$

6.3 Doublet achromatique

$$e = \frac{f'_1 + f'_2}{2}$$

Rq : pour deux lentilles dans le même matériaux, le tout dans l'air...

7 Oeil

$$A = \frac{1}{D} - \frac{1}{d} \quad \text{(invariant)}$$

En moyenne :

$$\epsilon = 4,4 * 10^{-4}\,\text{rad} \quad V = 60\,\delta \quad A = 4\,\delta$$

Pour un oeil normal :

$$d = -25\,\text{cm} \quad D = -\infty$$

Rq : pour corriger, on amène l'objet à l'infini sur le PR (par exemple).

8 Instruments d'optiques

$$G = \frac{|\theta'|}{\theta_d} \quad P = \frac{|\theta'|}{\overline{AB}} = \frac{1}{f'}\left[1 - \frac{\overline{F'O}}{\overline{A'O}}\right] \quad G = Pd \quad P_i = V$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \quad O.N. = n\,sin\,u$$

Rq : P max si oeil en F' ou A' à l'infini (ici cas de la loupe).

9 Lame verre

$$\delta = (n-1)e$$

$$d = e\frac{sin(i-r)}{cos(r)}$$

10 Matrices

Attention, on doit multiplier les matrices de la sortie vers l'entrée, et vérifier que le déterminant vaut 1.

10.1 Matrice rayon

Soit z l'axe optique.

$I(x,y)$ point d'incidence, $\vec{u}$ vecteur unitaire du rayon. $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, $\gamma = 1$ car conditions de Gauss.

On pose $\underline{x} = x + i\,y$ et $\underline{\alpha} = \alpha + i\,\beta$, d'où :

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ n\underline{\alpha} \end{pmatrix}$$

10.2 Matrice de réfraction

$$T(\overline{AB}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix}$$

10.3 Matrice de translation

e est la longueur du milieu d'indice n selon l'axe optique.

$$T(\overline{AB}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.4 Matrice de conjugaison

$$T(\overline{AA'}) = \begin{pmatrix} G_T & 0 \\ -V & \frac{1}{G_T} \end{pmatrix}$$

$$G_T G_\alpha \frac{n_i}{n_o} = 1$$

10.5 Eléments cardinaux

$$f_i = \frac{n_i}{V} \quad \overline{SH_i} = f_i(T_{11} - 1) \quad \overline{SN_i} = f_i(T_{11} - \frac{n_o}{n_i}) \quad \overline{SF_i} = f_i T_{11} \quad \overline{H_i F_i} = f_i$$

$$f_o = -\frac{n_o}{V} \quad \overline{EH_o} = f_o(T_{22} - 1) \quad \overline{EN_o} = f_o(T_{22} - \frac{n_i}{n_o}) \quad \overline{EF_o} = f_0 T_{22} \quad \overline{H_o F_o} = f_o$$

$$\overline{H_i N_i} = \overline{H_o N_o} = f_i + f_o \quad \overline{H_i H_o} = \overline{N_i N_o}$$

Si $n_i = n_o$, $H = N$, $f_i = -f_o$
Dioptre sphérique : $E = S = H_i = H_o \quad C = N_i = N_o$
Lentille épaisse : $H = N$
Lentille mince : $O = E = S = H = N$

11 Interférences

11.1 Interfrange

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

D distance entre les sources secondaires et l'occulaire où l'on observe les franges (pas l'écran ! !)
a distance entre les sources secondaires.

11.2 Interférence à deux ondes cohérentes

$$s_1 = a_1 cos(\omega t) \quad s_2 = a_2 cos(\omega t - \varphi)$$

$$I = \frac{1}{2}\left[(a_1 - a_2)^2 + 4a_1 a_2 cos^2(\frac{\varphi}{2})\right]$$

Si cohérentes, addition en amplitude, I dépend de φ.
Sinon, addition en intensité, I ne dépend pas de φ.

$$\gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad \text{(contraste)}$$

$$I = 2I_0(1 + cos\varphi)$$

11.3 Notation réelle / notation complexe

ATTENTION : En notation complexe, l'intensité est définie à une constante multiplicative près ! On perd le $\frac{1}{2}$! !

$$\text{Réelle} \ : \ S = a\,cos\left[(\omega t - \varphi)\right] \quad I =< s^2 >= \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Complexe} \ : \ S = a\,exp\left[j\,(\omega t - \varphi)\right] \quad I = SS^* = a^2$$

11.4 Type d'interférence

Division d'amplitude : Localisées, interfèrent en un point (lame à faces parallèles, coins). −> Anneaux

Division du front d'onde : Non localisées, interfèrent en tout point (michelson, fentes). −> Franges

Attention, si réflexions de nature différentes, déphasage de $\frac{\pi}{2}$ supplémentaire.

11.5 Méthode

Fentes :

Placer symétriquement, calculer le déphasage entre 2 fentes consécutives en projetant et en utilisant le sinus.

Calculer l'intensité avec la notation complexe.

Prendre l'axe central comme origine des phases.

Chercher les δ contructifs ou destructifs.

11.6 Lame à faces parallèles

$$\delta = 2\,n\,e\,cos\,r + \left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$r_k = \sqrt{\frac{\lambda(k-1)}{2ne} + r_1^2}$$

L'ordre p décroit à partir du centre.

Pour r_k, approximation du cos à l'ordre 2, et $R_k \simeq f'nr_q$.

Donc le rayons des anneaux augmente comme $\sqrt{k-1}$ et sont d'autant plus grands que l'épaisseur de la lame est faible.

Attention, déphasage supplémentaire de $\frac{\lambda}{2}$ si réflexion sur un milieu d'indice plus élevé.

11.7 Ondes multiples

$$I = \frac{I_0}{1 + m\ sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad m = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

Rq : on pose $s_i = A_i e^{j\omega t}$, on a une suite géométrique de raison $q = r^2 e^{j\varphi} < 1$ avec $I_0 = a^2$ donc tend vers $\frac{I_0}{1-q}$.

11.8 Interféromètre de Michelson

Peut être équivalent à une lame d'air. (Construire l'image du deuxième miroir par la séparatrice)

Peut être équivalent à un coin d'air.

11.9 Réseau

$$sin\,\theta - sin\,i = \frac{m\lambda}{h}$$

$$p = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}$$

L'efficacité d'un réseau est proportionnel à Np, N nombre de traits par unité de longueur.

12 Diffraction

Se produit quand la dimension de l'obstacle est de l'ordre de λ.

Principe d'Huygens : Les points objets éclairés sont des sources secondaires émmettant des ondes sphériques d'amplitude dA.

On a K complexe, O origine, P point de l'objet diffractant, dS surface élémentaire de l'objet autour de P,

$\overrightarrow{u}$ incident, $\overrightarrow{u'}$ observé.

$$dA(\overrightarrow{u}) = K\ exp\left[j\left(\frac{2\pi}{\lambda}\overrightarrow{OP}(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u'})\right)\right]$$

On obtient des sinus cardinal.

Contrairement à une figure d'interférences, la tache centrale de la figure de diffraction est deux fois plus grande que les autres.