Objets d'algèbre usuels

M. CHATEAU David

28/06/2009

Résumé

Rappels sur les principales structures d'algèbres. L'intérêt de ces structures est de pouvoir transposées des règles de calcul sur d'autres ensembles d'objets mathématiques. C'est dans cet esprit que sont rappelées ces propriétés.

Table des matières

1 Loi de composition interne **4**
1.1 Définition 4

2 Groupe **5**
2.1 Définition 5
2.2 Propriétés 5
2.3 Exemples de groupes 5
2.4 Sous-groupe 5
2.5 Exemples de sous-groupes 5

3 Morphisme de groupe **6**
3.1 Définition 6
3.2 Propriétés 6
3.3 Exemples de morphismes de groupes 6

4 Anneau **7**
4.1 Définition 7
4.2 Propriétés 7
4.3 Exemples 7
4.4 Sous-anneau 7
4.5 Exemples de sous-anneaux 7

5 Morphisme d'anneaux **8**
5.1 Définition 8
5.2 Exemples de morphisme d'anneaux 8

6 Corps **9**
6.1 Éléments inversibles d'un anneau 9
6.2 Exemples de groupes multiplicatifs 9
6.3 Définition 9
6.4 Exemples de corps 9
6.5 Sous-corps 9

7 Morphisme de corps **10**
7.1 Définition 10

8 Espace vectoriel **11**
8.1 Définition 11
8.2 Sous-espace vectoriel 11
8.3 Sous-espaces vectoriels en somme directe 11
8.4 Sous-espaces vectoriels supplémentaires 11
8.5 Sous espace vectoriel engendré 11

9 Sous-espace affine **12**

10 Morphisme d'espace vectoriel **13**
10.1 Définition 13

11 Ensembles ayant une structure remarquable **14**

1 Loi de composition interne

1.1 Définition

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \rightarrow & E \\ (a;b) & \longmapsto & a * b \end{array}$$

Propriété	Relation
Commutative	$a * b = b * a$
Associative	$a * (b * c) = (a * b) * c$
Élément neutre	$a * e = e * a = a$
Symétrique	$a * a' = a' * a = e$

Attention, le symbole * représente une opération mathématique quelconque.

2 Groupe

2.1 Définition

$$G(*)$$

Axiome	Définition
G1	Associativité de *
G2	Existence du neutre
G3	Existence des symétriques
Groupe commutatif (abélien)	Commutativité de *

2.2 Propriétés

Propriété	Définition
PG1	G non vide, contient le neutre
PG2	Unicité du neutre
PG3	Unicité des symétriques
PG4	$ax = ay \Rightarrow x = y$ (a est dit régulier)
PG5	$ax = b$ a une solution unique $x = a^{-1}b$
PG6	$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

2.3 Exemples de groupes

$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{Q}^*, \times), (\mathbb{R}^*, \times), (\mathbb{C}^*, \times), (Bij(E), \circ)$

2.4 Sous-groupe

Pour montrer que H est un sous-groupe de G, on montre :
- H contient le neutre.
- H stable par *.
- H contient les symétriques de ses éléments.

2.5 Exemples de sous-groupes

- $\{e\}$ et G sont des sous-groupe de G.
- L'intersection de deux sous-groupe de G est un sous-groupe de G.
- $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, ensemble des complexes de module 1, est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
- $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$, ensemble des racines n-ième de l'unité, est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
- L'ensemble des suites convergentes est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +)$.
- L'ensemble des fonctions continues est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$.

3 Morphisme de groupe

3.1 Définition

Soit (E,+) et (F,×), un morphisme de groupes est une application f de E dans F telle que :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

Nom	Caractéristique
Endomorphisme	De E dans E
Isomorphisme	f est bijective (E et F sont alors isomorphes)
Automorphisme	Endomorphisme + Isomorphisme

Les lois + et × sont quelconques.

3.2 Propriétés

- La composées de deux morphismes est un morphisme.
- Si f morphisme de $(G, \times)$ dans $(G', \times)$, alors $f(e) = e'$ et $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$
- Si f morphisme de $(G, \times)$ dans $(G', \times)$, alors
  - $Ker(f) = \{x \in G, f(x) = e'\}$ est un sous groupe de G.
  - $Ker(f) = \{e\} \Leftrightarrow f$ est injectif.
- Si f morphisme de $(G, \times)$ dans $(G', \times)$, alors
  - $Im(f) = \{y \in G', \exists x \in G, y = f(x)\}$ est un sous groupe de G.
  - $Im(f) = G' \Leftrightarrow f$ est surjectif.

3.3 Exemples de morphismes de groupes

La fonction exponentielle, la fonction logarithme, la fonction puissance...

4 Anneau

4.1 Définition

$$(A, +, \times)$$

Axiome	Définition
A1	(A,+) groupe abélien de neutre 0_A
A2	Associativité de $\times$
A3	Existence du neutre pour $\times$ noté 1_A
A4	Distributivité de $\times$ par rapport à $+$
Anneau commutatif	Commutativité de $\times$

4.2 Propriétés

Si deux éléments commutent, on peut leur appliquer la formule du binôme.

4.3 Exemples

$(\mathbb{Z}, +, \times), (\mathbb{Q}, +, \times), (\mathbb{R}, +, \times), (\mathbb{C}, +, \times), (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times), (\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times)$

4.4 Sous-anneau

Pour montrer que B est un sous-anneau de A, on montre :
- B contient 1_A.
- B contient $x - y$
- B contient xy

4.5 Exemples de sous-anneaux

Les ensembles des fonctions polynomiales, des fonctions continues, des fonctions bornées, sont des sous-anneaux de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Les ensembles des suites convergentes, des suites périodiques, sont des sous-anneaux de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

5 Morphisme d'anneaux

5.1 Définition

Soit (A,+,×) et (A',+,×), un morphisme d'anneaux est une application f de A dans A' telle que :

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(x \times y) = f(x) \times f(y) \\ f(1_A) = 1_{A'} \end{cases}$$

Nom	Caractéristique
Endomorphisme	De E dans E
Isomorphisme	f est bijective (E et F sont alors isomorphes)
Automorphisme	Endomorphisme + Isomorphisme

Les lois + et × sont quelconques.

5.2 Exemples de morphisme d'anneaux

- L'application $z \mapsto \bar{z}$ est un automorphisme de l'anneau $\mathbb{C}$.

- L'application $(u_n) \mapsto lim_{n \to +\infty} u_n$ est un automorphisme de l'anneau des suites convergentes dans $\mathbb{R}$.

6 Corps

6.1 Éléments inversibles d'un anneau

$x \in A$ est inversible si et seulement si :

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1_A$$

Ces éléments forment un groupe multiplicatif.

6.2 Exemples de groupes multiplicatifs

$(\{-1, 1\}, \times)$ pour $\mathbb{Z}$. ; $(\mathbb{C}^*, \times)$ pour $\mathbb{C}$; les suites qui ne s'annulent pas pour $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

6.3 Définition

$$(\mathbb{K}, +, \times)$$

Un corps est un anneau non réduit à $\{0\}$ dont tout élément non nul est inversible.

6.4 Exemples de corps

$(\mathbb{Q}, +, \times), (\mathbb{R}, +, \times), (\mathbb{C}, +, \times)$

6.5 Sous-corps

Pour montrer que L est un sous-corps de K, on montre :
- L$\backslash\{0\} \neq \emptyset$
- L contient $x - y$
- L contient xy^{-1} avec y non nul.

7 Morphisme de corps

7.1 Définition

Soit (K,+,×) et (K',+,×), un morphisme de corps est une application f de A dans A' telle que :

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(x \times y) = f(x) \times f(y) \\ f(1_A) \neq \emptyset \end{cases}$$

On a forcément la correspondance des unités à causes des morphismes...

8 Espace vectoriel

8.1 Définition

$(E, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si et seulement si :
- $(E, +)$ est un groupe commutatif de neutre 0_E. $+$ est la loi interne
- La loi externe $\times$ est telle que :

Axiome	Expression
EV1	Distributivité de $\times$ par rapport à $+$ sur un vecteur $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $(\alpha + \beta) \times x = \alpha \times x + \beta \times x$
EV2	Distributivité de $\times$ par rapport à $+$ sur un scalaire $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall(x, y) \in E^2$, $\alpha \times (x + y) = \alpha \times x + \alpha \times y$
EV3	Associativité de $\times$ sur scalaires et vecteur $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $\alpha \times (\beta \times x) = (\alpha \times \beta) \times x$
EV4	Identité du vecteur $\forall x \in E$, $1 \times x = x$

On retrouve ainsi nos règles de calcul habituelles.

8.2 Sous-espace vectoriel

Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, on montre :
- F non vide
- F stable par combinaison linéaire

L'intersection de sous espaces vectoriels est un espace vectoriel, pas la somme !

8.3 Sous-espaces vectoriels en somme directe

$$F \cap G = \{0_E\}$$

La décomposition est alors unique et $dim(F \cup G) = dim(F) + dim(G)$

8.4 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

$$F + G = E \qquad F \cap G = \{0_E\}$$

On a alors $dim(F) + dim(G) = dim(E)$

8.5 Sous espace vectoriel engendré

$Vect(\{a_1, \ldots, a_p\})$ est l'ensemble des combinaison linéaires des a_i.

9 Sous-espace affine

Soit l'équation $x_1C_1 + \cdots + x_pC_p = Y$, la solution est :

$\{X^* + X\}$ avec X solution du système homogène. X est un espace vectoriel. La solution est un espace affine.

10 Morphisme d'espace vectoriel

10.1 Définition

Soit E et F, un morphisme d'espace vectoriel est une application f de E dans F telle que :

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2\,\forall(x,y)\in E^2\; f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$$

f est alors une *application linéaire* et on a :

$$f(0_E)=0_F \qquad f(-x)=-f(x)$$

On note l'ensemble des applications linéaires de E dans F $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ ou $\mathcal{L}(E,F)$.

11 Ensembles ayant une structure remarquable

$(\mathbb{K}[X],+)$, $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+)$, $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),+)$ sont des groupes commutatifs.

$(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau.

$(\mathbb{K}[X],+,\times)$, $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,\times)$ sont des anneaux commutatifs.

$(\mathbb{K}[X],+,\times,.)$, $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,\times,.)$, $(\mathbb{R}^{D},+,\times,.)$, $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),+,\times,.)$, $C^0(U,\mathbb{R})$, $C^1(U,\mathbb{R})$, $C^2(U,\mathbb{R})$ sont des espaces vectoriels.