Mécanique du solide

M. CHATEAU David

18/04/2010

Résumé

Formulaire de mécanique du solide

Table des matières

1 Torseurs

1.1 Champ antisymétrique = Champ équiprojectif

$$\overrightarrow{M}(B) = \overrightarrow{M}(A) + \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{M}(A) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{M}(B)$$

1.2 Eléments de réduction du torseur au point P

$$[M]_P = \left| \begin{array}{c} \overrightarrow{R} \text{ (résultante)} \\ \overrightarrow{M}(P) \text{ (moment au point P)} \end{array} \right.$$

La résultante ne dépend pas de la géométrie du système.

L'axe central du torseur est l'ensemble des points où le moment est colinéaire à la résultante.

1.3 Comoment

$$C_{M_1,M_2} = \overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_2}(P) + \overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{M_1}(P)$$

Le comoment de deux torseurs est indépendant du point P.

1.4 Invariant scalaire

$$J_{(T)} = \overrightarrow{R}.\overrightarrow{M}(P)$$

1.5 Invariant vectoriel

$$\overrightarrow{I_{(T)}} = J_{(T)} \frac{\overrightarrow{R}}{||\overrightarrow{R}||^2}$$

1.6 Glisseur et Couple

Glisseur si il existe un point tel que $\overrightarrow{M}(P) = \overrightarrow{0}$

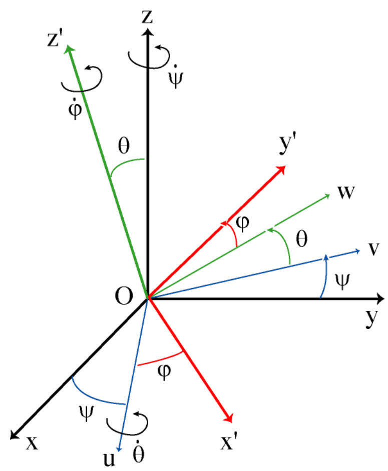
Couple si $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$.

1.7 Système mécanique rigide

$$6\,DDL \quad \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = \overrightarrow{Cte}$$

Pour un système déformable, on a une infinité de DDL.

1.8 Angles d'Euler



1.9 Matrice de rotation

$$X' = T(\theta)\, X$$

$$T(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \quad T^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

2 Composition

$r = (O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ fixe
$R = (0, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$ mobile

2.1 Dérivation composée

$$\left.\frac{\mathrm{d}[\overrightarrow{\alpha}]^R}{\mathrm{d}t}\right|_r = \left.\frac{\mathrm{d}[\overrightarrow{\alpha}]^R}{\mathrm{d}t}\right|_R + \left[\overrightarrow{\Omega_{R/r}}\right]^R \times [\overrightarrow{\alpha}]^R$$

$$\overrightarrow{\Omega_{R/r}} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{X} \times \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{X}}{\mathrm{d}t}\right|_r + \overrightarrow{Y} \times \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{Y}}{\mathrm{d}t}\right|_r + \overrightarrow{Z} \times \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{Z}}{\mathrm{d}t}\right|_r\right]$$

Rq : les vecteurs rotations se composent, et peuvent être décomposer en roulement et pivotement.

Rq : Si translation, $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{0}$; Si rotation autour d'un axe $\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{\Omega} = \dot{\theta}\overrightarrow{k}$.

2.2 Composition vitesses

$$\overrightarrow{V_{abs}} = \overrightarrow{V_{rel}} + \overrightarrow{V_{ent}}$$

Avec

$$\overrightarrow{V_{abs}} = \overrightarrow{V}(P/r)$$
$$\overrightarrow{V_{rel}} = \overrightarrow{V}(P/R)$$
$$\overrightarrow{V_{ent}} = \overrightarrow{V}(O'/r) + \overrightarrow{\Omega_{R/r}} \times \overrightarrow{O'P} \quad \text{(translation + rotation)}$$

2.3 Composition accélérations

$$\overrightarrow{\Gamma_{abs}} = \overrightarrow{\Gamma_{rel}} + \overrightarrow{\Gamma_{ent}} + \overrightarrow{\Gamma_c}$$

Avec

$$\overrightarrow{\Gamma_{abs}} = \overrightarrow{\Gamma}(P/r)$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{rel}} = \overrightarrow{\Gamma}(P/R)$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{ent}} = \overrightarrow{\Gamma}(O'/r) + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega_{R/r}}}{\mathrm{d}t} \times \overrightarrow{O'P} + \overrightarrow{\Omega_{R/r}} \times \left(\overrightarrow{\Omega_{R/r}} \times \overrightarrow{O'P}\right) \quad \text{(translation+angulaire + centripète)}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_c} = 2\overrightarrow{\Omega_{R/r}} \times \overrightarrow{V}(P/R)$$

3 Torseur cinématique

3.1 Définition

ATTENTION, le torseur cinématique n'est défini que en des points appartenant au solide ou à son prolongement ! !

Le mouvement le plus général est hélicoïdal.

$$[V(S/R)]_A = \left| \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V}(A \in S/R) \end{array} \right.$$

3.2 Vitesse de glissement

$$\overrightarrow{V_g}(I|S_2/S_1) = \overrightarrow{V}(I_2 \in S_2/R) - \overrightarrow{V}(I_1 \in S_1/R)$$

$$\overrightarrow{V_g}.\overrightarrow{n} = \overrightarrow{0}$$

ATTENTION : Ne jamais dériver la position ou la vitesse du point de contact ! En effet, ce n'est pas le même point au cours du temps...

Calculer pour un point du disque et changer de point (ou particulariser).

3.3 Contact et liaisons

Liaison : contact multiponctuel bilatéral
Liaison rotoïde : rotations d'angle φ autour d'un axe.
Liaison glissière : translations de longueur λ selon un axe.
Liaison verrou = rotoïde + glissière.
Liaison rotule : rotations d'angles ψ, θ, φ autour d'un point.

3.4 Méthode générale

Si $\overrightarrow{\Omega}$ connu :
- Vitesse d'un point du solide connue (nulle si possible, intersection axes de rotation...) $\Rightarrow$ Changement de point.
- Pas de vitesse connue $\Rightarrow$ dérivation composée
Si $\overrightarrow{\Omega}$ inconnu :
- Equiprojectivité

4 Torseur cinétique

4.1 Géométrie des masses

$$\left(\int_{V(t)} \rho(M,t)\mathrm{d}V(t)\right)\overrightarrow{OG} = \int_{V(t)} \rho(M,t)\overrightarrow{OM}\mathrm{d}V(t)$$

Si homogène,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\Omega}\int \overrightarrow{OM}\mathrm{d}\Omega$$

On notera la notion de centre de masse partiels.
De plus, G appartient à S.

4.2 Moments d'inerties

4.2.1 Définitions

$$I_A(S) = \int_{V(t)} ||\overrightarrow{AM}||^2 \rho(M,t)\mathrm{d}V$$

$$I_\Delta(S) = \int_{V(t)} ||\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{AM}||^2 \rho(M,t)\mathrm{d}V$$

4.2.2 Opérateur d'inertie

$$I_\Delta(S) = \overrightarrow{u}.\,[J_A(S)]^R\,\overrightarrow{u}$$

Forme quadratique, on peut définir aussi un éllipsoïde d'inertie.

$$J_A(S) = \int_{V(t)} \overrightarrow{AM} \times (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{AM})\rho(M,t)\mathrm{d}V$$

J est l'oprateur associé à la matrice I.

Attention, on calcule cette matrice le plus souvent dans le repère du solide. Pour les applications, il faudra donc faire attention à la base du vecteur sur lequel on opère.

4.2.3 Théorème d'Huygens

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + mD^2$$

4.2.4 Matrice d'inertie

Dans R_s, $A(a_1,a_2,a_3) \in S$, $M(x_1,x_2,x_3) \in S$

$$I^A_{11}(S) = \int_V [(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2]\rho(M)\mathrm{d}V \quad I^A_{12}(S) = -\int_V (x_1-a_1)(x_2-a_2)\rho(M)\mathrm{d}V$$

$$I^A_{22}(S) = \int_V [(x_1-a_1)^2+(x_3-a_3)^2]\rho(M)\mathrm{d}V \quad I^A_{13}(S) = -\int_V (x_1-a_1)(x_3-a_3)\rho(M)\mathrm{d}V$$

$$I^A_{33}(S) = \int_V [(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2]\rho(M)\mathrm{d}V \quad I^A_{23}(S) = -\int_V (x_2-a_2)(x_3-a_3)\rho(M)\mathrm{d}V$$

Facile à retenir, attention au signe moins.

Le système a tendance à tourner autour de l'axe de moment d'intertie le plus élevé.

Les moments d'intertie sont minimum en G.

Rq : faire attention au sens des bornes, on part du point de réduction !

4.2.5 Théorème de Koenig

Il existe des théorèmes analogues pour le moment cinétique et l'énergie cinétique.

Attention, G est le centre de masse ! $\overrightarrow{AG}(X,Y,Z)$ (sens sans importance)

$$I^A_{11}(S) = I^G_{11}(S) + m(Y^2+Z^2) \quad I^A_{12}(S) = I^G_{12}(S) - mXY$$
$$I^A_{22}(S) = I^G_{22}(S) + m(X^2+Z^2) \quad I^A_{13}(S) = I^G_{13}(S) - mXZ$$
$$I^A_{33}(S) = I^G_{33}(S) + m(X^2+Y^2) \quad I^A_{23}(S) = I^G_{23}(S) - mYZ$$

4.3 Torseur cinétique

En tout point de l'espace,

$$[\sigma(S/R)]_A = \left| \begin{array}{c} \overrightarrow{P}(S/R) = m\overrightarrow{V}(G \in S/R) \\ \overrightarrow{\sigma}(A, S/R) = J_A(S)\overrightarrow{\Omega}(S/R) + \overrightarrow{AG} \times m\overrightarrow{V}(A \in S/R) \end{array} \right.$$

Notation internationnale : $\overrightarrow{L}$ au lieu de $\overrightarrow{\sigma}$.

Méthode : Calculer en G ou en un point fixe de R pour annuler le second terme, puis changer de point.

On rappelle les définitions : (quantité de mouvement et moment cinétique)

$$\overrightarrow{P}(S/R) = \int_{V(t)} \overrightarrow{V}(M/R)\rho(M,t)\mathrm{d}V$$

$$\overrightarrow{\sigma}(A, S/R) = \int_{V(t)} \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{V}(M/R)\rho(M,t)\mathrm{d}V$$

4.3.1 Cas d'un système

$$[\sigma(S/R)]_A = \sum_i [\sigma(S_i/R)]_A$$

Méthode :

- Calculer $[\sigma(S_i/R)]_{A_i}$ où $A_i \in S$ (G ou fixe si possible..)
- Changement de point en A
- Sommation

5 Torseur Dynamique

5.1 Torseur dynamique

En tout point de l'espace,

$$[\delta(S/R)]_A = \left| \begin{array}{c} \overrightarrow{r}(S/R) = m \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{P}(G \in S/R)\right|_R \\ \overrightarrow{\delta}(A, S/R) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}(A \in S/R)\right|_R + \overrightarrow{V}(A/R) \times m\overrightarrow{V}(G \in S/R) \end{array} \right.$$

Notation internationnale : $\overrightarrow{D}$ au lieu de $\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{N}$ au lieu de $\overrightarrow{\delta}$.

Méthode : Calculer en G ou en un point fixe de R pour annuler le second terme, puis changer de point.

On rappelle les définitions : (quantité d'accélération et moment dynamique)

$$\overrightarrow{r}(S/R) = \int_{V(t)} \overrightarrow{\Gamma}(M/R)\rho(M,t)\mathrm{d}V$$

$$\overrightarrow{\delta}(A, S/R) = \int_{V(t)} \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{\Gamma}(M/R)\rho(M,t)\mathrm{d}V$$

5.1.1 Cas d'un système

$$[\delta(S/R)]_A = \sum_i [\delta(S_i/R)]_A$$

Méthode :
- Calculer $[\sigma(S_i/R)]_{A_i}$ où $A_i \in S$ (G ou fixe si possible..)
- Changement de point en A
- Sommation en G puis dérivation
- Changement de point si besoin

OU
- Calculer $[\delta(S_i/R)]_{A_i}$ où $A_i \in S$ (G ou fixe si possible..)
- Changement de point en A
- Sommation en A

6 Energie cinétique

$$E_c = \int_{V(t)} \frac{1}{2} \overrightarrow{V}^2(M \in S/R)\, \rho(M,t)\, \mathrm{d}V$$

Si rigide,

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2}[V(S/R)]_A \times [\sigma(S/R)]_A$$

Pour un système,

$$E_C(S/R) = \sum_i E_c(S_i/R)$$

7 Actions mécaniques

7.1 Axiomes

7.1.1 Axiome 1

S_1 exerce une action sur S_2 si le mouvement de S_2 est modifié par la présence ou l'absence de S_1.

7.1.2 Axiome 2

L'action mécanique de S_1 sur S_2 est modélisée à chaque instant par un torseur : le torseur d'action.

$$[F(S_1 \to S_2)]_A = \left| \begin{array}{ll} \overrightarrow{F}(S_1 \to S_2) & \text{(résultante de l'action)} \\ \overrightarrow{M}(S_1 \to S_2)(A) & \text{(moment résultant)} \end{array} \right.$$

7.1.3 Axiome 3

L'action mécanique de différentes parties d'un système sur un autre est la somme des actions de chaque système sur ce dernier.

L'action mécanique sur différentes parties d'un système par un autre est la somme des actions de ce système sur chaque partie ce dernier.

$$[F(S_1 \cup S_2 \to S_3)]_A = [F(S_1 \to S_3)]_A + [F(S_2 \to S_3)]_A$$

$$[F(S_1 \to S_2 \cup S_3)]_A = [F(S_1 \to S_2)]_A + [F(S_1 \to S_3)]_A$$

7.1.4 Axiome 4

$\sum$ un système matériel, P un point matériel de S. On modélise l'action de $\sum$ sur P par :

- Si S est un système matériel discret, on modélise l'action par un glisseur :

$$[F(\sum \to P)]_P = \left| \begin{array}{c} \overrightarrow{F}(\sum \to P) \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right.$$

- Si S est un système matériel continu, on modélise l'action par un torseur :

$$[F(\sum \to P)]_P = \left| \begin{array}{c} \int_D \overrightarrow{F_D}(P)(\sum \to P)\,\mathrm{d}D \\ \int \overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{F_D}(P)(\sum \to P)\,\mathrm{d}D \end{array} \right.$$

Rq : Ce sont une densité de force et densité de moment.

Rq : Si matériau non polaire, la densité de moment est nulle.

Rq : On note $\mathrm{d}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(P)\mathrm{d}D$ où $\overrightarrow{F}(P)$ est la fonction de répartition d'effort et $\mathrm{d}D$ un volume élémentaire représentatif (VER)

Attention ! ! Ne pas sommer des torseurs dont les points de réduction sont différents !

Rq : Au pire, on a donc action volumique, action surfacique, action linéique et action discrète.

Rq : Le poids s'applique en G.

Rq : Si le torseur est réduit au point d'application, le moment est nul, SAUF pour les liaisons ! On fait alors l'hypothèse de la liaison parfaite, c'est à dire que la puissance est nulle.

Rq : En particulier pour une rotoïde, le moment selon l'axe de la rotoïde est nul.

7.2 Vocabulaire

La différence entre résultante est force est la notion de point d'application

On distingue action de contact ou à distance selon que l'action se réalise sur des points de surface ou intérieurs du système.

On distingue action intérieure ou extérieure selon que l'origine de l'action est intérieure ou extérieure au système.

On distingue répartition d'effort discrète ou continue selon que l'action s'exerce sur un système discret ou continu de points.

On peut modéliser les forces inconnues en les étudiant et en construisant des lois complémentaires.

7.3 Puissance

$$\mathcal{P}(\sum \to P/R) = \overrightarrow{F}(t).\overrightarrow{V}(P/R)$$

Si rigide,

$$\mathcal{P}(\sum \to P/R) = [V(S/R)]_A \times [F(\sum \to S)]_A$$

Rq : Si rigide, la puissance des forces intérieures est nulle !!

8 Grands théorèmes

8.1 Principe fondamental de la dynamique (PFD)

Dans tout repère galiléen, pour tout système matériel, la somme des torseurs des efforts extérieurs est égale au torseur dynamique du système par rapport à R.

$$\sum_i [F_{i,ext}]_O = [\delta(S/R)]_O$$

Rq : si galiléen, même $\overrightarrow{\Gamma}$.
Rq : Si pas galiléen, rajouter forces d'inertie.
Rq : On a $[F(\sum \to S)]_A = -[F(S \to \sum)]_A$

8.2 Thérorème de l'énergie cinétique

Dans tout repère galiléen R, pour tout système matériel S (déformable ou non), la variation d'énergie cinétique de S/R est égale à la somme des puissances des efforts extérieurs et intérieurs.

$$\frac{\mathrm{d}E_C(S/R)}{\mathrm{d}t} = \sum_i P(\sum \to S/R)$$

9 Lois de Coulomb

9.1 Statique

En présence de frottements, si deux solides sont en contact ponctuel en I tel que $\overrightarrow{V_g}(I|S_2/S_1) = \overrightarrow{0}$ alors

$$F_T \leq f_s F_N$$

où $f_s = \mu_s > 0$ coefficient de frottement statique. Dépend des matériaux et des états des surfaces de contact.

Si pas de frottement, alors $f_s = 0$.

Rq : on a $f_s = tan(\theta)$ où θ est l'angle où le système commence à glisser.

9.2 Dynamique

En présence de frottements, si deux solides sont en contact ponctuel en I tel que $\overrightarrow{V_g}(I|S_2/S_1) = \overrightarrow{0}$ alors

$$\overrightarrow{F_T} = -f_d F_N \overrightarrow{V_g}$$

où $f_d = \mu > 0$ coefficient de frottement dynamique. Dépend des matériaux et des états des surfaces de contact.

Si pas de frottement, alors $f_d = 0$.

Rq : $f_d < f_s$

Rq : Ceci s'explique par le fait qu'en appuyant sur le système, on augmente le frottement tangentiel.

9.3 Méthode

On se place dans le cas statique, on résout et on calcule F_T et F_N.

On vérifie $F_T \leq f_s F_N$. Si c'est vrai, on a fini, sinon on recommence en considérant le cas dynamique.

10 Stabilité

Correspond à un minimum d'énergie potentielle. Dans les cas simples on peut regarder les dérivées premières et secondes pour savori s'il ont est dans un puit de potentiel.

Equilibre stable si une petite perturbation conduit à des oscillations de faibles amplitudes.

10.1 Cas de l'équation $\dot{q}^2 = f(q) + K$

C'est l'intégrale première du mouvement, qu'on obtient en multipliant par $\dot{q}$ et en intégrant une des équations donnée par le PFD. On suppose les CI données.

Les positions d'équilibres sont données par $\dot{q}(t) = 0\,\forall t$ et donc $\ddot{q}(t) = 0\,\forall t$.

Donc $f(q_e) + K = 0$ et $f'(q_e) = 0$.

Soit p le premier entier supérieur à 1 tel que $f^{(p)}(q_e) \neq 0$.
Si p impair, l'équilibre est instable.
Si p pair et $f^{(p)}(q_e) > 0$, l'équilibre est instable.
Si p pair et $f^{(p)}(q_e) < 0$, l'équilibre est stable.