Géométrie élémentaire

M. CHATEAU David

16/06/2009

Résumé

Géométrie élémentaire

Table des matières

1 Longueurs usuelles **3**

2 Aires usuelles **3**

3 Volumes usuels **3**

4 Thalès **3**

5 Pythagore **3**

6 Relations dans un triangle **4**
6.1 Al-Kashi 4
6.2 Inégalité triangulaire 4
6.3 Formule des sinus 4
6.4 Formule de Héron 4
6.5 Rayons des cercles 4

7 Droites remarquables d'un triangle **5**
7.1 Médianes 5
7.2 Hauteurs 5
7.3 Bissectrices 5
7.4 Médiatrices 5

8 Géométrie dans la plan et dans l'espace **6**
8.1 Équation d'un cercle 6
8.2 Distance point-droite 6
8.3 Équation d'une sphère 6
8.4 Distance point-plan 6
8.5 Cartésien ou paramétrique 6

9 Géométrie et complexes **6**

10 Inégalités et valeurs absolues **7**

1 Longueurs usuelles

Forme	Longueur
Carré	$4a$
Rectangle	$2(L+l)$
Cercle	$2\pi R$
Arc de cercle	αR
Cardioïde $r = a(1 + cos\theta)$	$8a$
Cycloïde	$8R$
Diagonale du carré	$a\sqrt{2}$
Hauteur du triangle équilatéral	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$

2 Aires usuelles

Forme	Surface
Carré	a^2
Rectangle	$L * l$
Parallélogramme	$L * h$
Losange	$(D * d)/2$
Trapèze	$(B + b) * h/2$
Disque	πR^2
Sphère	$4\pi R^2$
Cylindre	$2\pi Rh$
Secteur angulaire	$\alpha R^2/2$

3 Volumes usuels

Forme	Volume
Cube	a^2
Parallélépipède rectangle	$L * l * h$
Prisme droit	$B * h$
Pyramide	$(B * h)/3$
Cylindre	$\pi R^2 h$
Cône	$\pi R^2 h/3$
Sphère	$4\pi R^3/3$

4 Thalès

Proportionnalité des côtés de deux triangles portés par deux mêmes droites.

5 Pythagore

Dans un triangle rectangle, a étant l'hypoténuse, on a : $a^2 = b^2 + c^2$

6 Relations dans un triangle

6.1 Al-Kashi

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc * cos(\hat{A})$$

6.2 Inégalité triangulaire

$$a \leq b + c$$

6.3 Formule des sinus

S la surface du triangle, R le rayon du cercle circonscrit.

$$\frac{a}{sin\hat{A}} = \frac{b}{sin\hat{B}} = \frac{c}{sin\hat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R \qquad abc = 4RS$$

6.4 Formule de Héron

S la surface du triangle, p est le demi-périmètre du triangle, r le rayon du cercle inscrit.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad S = pr$$

6.5 Rayons des cercles

R le rayon du cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit. On déduit des formules précédentes : $2rR = \frac{abc}{a+b+c}$

7 Droites remarquables d'un triangle

7.1 Médianes

Partent d'un sommet et coupent le côté opposé en son milieu.

Se coupent au *centre de gravité* G du triangle, situé à 2/3 des sommets sur les médianes.

On a $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

7.2 Hauteurs

Partent d'un sommet et coupent le côté opposé perpendiculairement.

Se coupent à l'*orthocentre* du triangle.

7.3 Bissectrices

Partent d'un sommet et coupent l'angle de ce sommet en deux parties égales.

Se coupent au *centre du cercle inscrit* dans le triangle.

7.4 Médiatrices

Coupent un côté perpendiculairement en son milieu.

Se coupent au *centre de cercle circonscrit* au triangle.

8 Géométrie dans la plan et dans l'espace

8.1 Équation d'un cercle

Le centre du cercle étant $\Omega(x_0; y_0)$, on a :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

8.2 Distance point-droite

Point $M(x_0; y_0)$, droite $D : ax + by + c = 0$, on a :

$$d(M, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

8.3 Équation d'une sphère

Le centre de la sphère étant $\Omega(x_0; y_0; z_0)$, on a :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

8.4 Distance point-plan

Point $M(x_0; y_0; z_0)$, plan $P : ax + by + cz + d = 0$, on a :

$$d(M, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

8.5 Cartésien ou paramétrique

Il y a deux façon de définir un objet géométrique.

Par des équations cartésiennes, qui relient les variables entre elles.

Par des équations paramétriques, qui expriment les variables en fonction de paramètres pouvant varier.

9 Géométrie et complexes

Les nombres complexes sont souvent utile pour montrer différentes propriétés de géométrie (translation, rotation, homothétie appartenance à un cercle, appartenance à une médiatrice...)

On retiendra surtout que

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = Arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right)$$

$$zz' = (r + r')e^{i(\theta + \theta')}$$

(Se reporter à la fiche de Terminale S pour plus de précisions)

10 Inégalités et valeurs absolues

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$|a-b| \leq |a| + |b|$$

$$|a| - |b| \leq |a-b|$$

$$||a| - |b|| \leq |a-b| \leq |a| + |b|$$

$$||a| - |b|| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$$