Relativité Restreinte

1 Cinématique relativiste

► Transformation de Lorentz

Un référentiel R' est en mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{e_x}$ par rapport à un référentiel inertiel R, les transformations de coordonnées permettant le passage de R à R' s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{c} ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right) \\ x' = \gamma\left(x - vt\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{array}\right\} \underset{\begin{array}{c}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} \\ v \longleftrightarrow -v \end{array}}{\overset{\text{Permutation relativiste}}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{c} ct = \gamma\left(ct' + \frac{v}{c}x'\right) \\ x = \gamma\left(x' + vt'\right) \\ y = y' \\ z = z' \end{array}\right\}$$

Où le coefficient sans dimension γ s'exprime selon

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{où} \qquad \beta \equiv \frac{v}{c}$$

Ecriture matricielle

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice de Lorentz } \Lambda(v)} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

► Invariant de Lorentz

La quantité s^2 suivante est invariante par transformation de Lorentz

$$s^2 \equiv (ct)^2 - x^2$$

► Contraction des longueurs

La longueur propre l_0 d'un objet est sa longueur maximale : dans un référentiel inertiel en mouvement par rapport à l'objet avec une vitesse v, on mesure la longueur contractée

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2} < l_0 \qquad \text{où} \qquad \beta \equiv \frac{v}{c}$$

► Dilatation du temps

L'intervalle de temps propre Δt_0 est minimal : un observateur en mouvement à vitesse constante par rapport à la montre mesurant Δt_0 mesurera quant à lui un intervalle temporel plus grand

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} > \Delta t_0 \qquad \text{où} \qquad \beta \equiv \frac{v}{c}$$

2 Mécanique relativiste

2.1 Quadrivecteurs et géométrie de Minkowski

► **Définition : quadrivecteur**

Un quadrivecteur est un vecteur $\tilde{a} = (a^\mu)_{\mu=0,1,2,3}$ de $\mathbb{R}^4$ dont les coordonnées se transforment par changement de référentiel inertiel selon les transformations de Lorentz

$$\tilde{a}' = \Lambda \tilde{a}$$

Exemples

▷ quadrivecteur position $\tilde{x} = (ct, \overrightarrow{x})$
▷ quadrivecteur énergie-impulsion $\tilde{p} = \left(\frac{E}{c}, \overrightarrow{p}\right)$
▷ quadrivecteur d'onde $\tilde{k} = \left(\frac{\omega}{c}, \overrightarrow{k}\right)$

► **Définition : produit scalaire pseudo-riemannien de Minkowski**

Soient $\tilde{a} = \left(a^0, \overrightarrow{a}\right)$ et $\tilde{b} = \left(b^0, \overrightarrow{b}\right)$ deux quadrivecteurs, leur produit scalaire selon Minkowski est défini par

$$\left\langle \tilde{a}, \tilde{b} \right\rangle_M \equiv a^0 b^0 - \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

Ecriture matricielle

$$\left\langle \tilde{a}, \tilde{b} \right\rangle_M = \tilde{a}^t \underbrace{[\eta]}_{\text{Tenseur métrique}} \tilde{b} = \begin{bmatrix} a^0 & a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix}$$

Propriété Le produit scalaire de deux quadrivecteurs est invariant par transformation de Lorentz

$$\left\langle \tilde{a}', \tilde{b}' \right\rangle_M = \left\langle \tilde{a}, \tilde{b} \right\rangle_M$$

► **Définition : temps propre d'une particule massive en mouvement**

Soit une particule massive en mouvement à la vitesse $\overrightarrow{v}$ par rapport à un référentiel inertiel, on définit le temps propre τ associé à cette particule par

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 \qquad \text{donc} \qquad d\tau = \frac{dt}{\gamma(t)} \quad \text{avec} \quad \gamma(t) \equiv \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\overrightarrow{v}^2(t)}{c^2}}}$$

Le temps propre τ ainsi défini est invariant par changement de référentiel inertiel (invariant relativiste).

2.2 Equation du mouvement relativiste

► **Définition : quadrivecteur vitesse**

$$\tilde{u} \equiv \frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \gamma(t) \frac{d\tilde{x}}{dt} \qquad \text{donc} \qquad u^0 = \gamma(t)\, c \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u} = \gamma(t)\, \overrightarrow{v} = \gamma(t) \frac{d\overrightarrow{x}}{dt}$$

Propriété

$$\tilde{u}^2 \equiv \langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle_M = c^2 \qquad \text{à tout instant}$$

► **Définition : quadrivecteur accélération**

$$\tilde{a} \equiv \frac{d\tilde{u}}{d\tau} = \frac{d^2\tilde{x}}{d\tau^2}$$

► **Définition : énergie d'une particule relativiste**

▷ *Pour une particule massive ($m \neq 0$)*

$$E \equiv \gamma(t)\, mc^2 \quad \text{et} \quad E_c = \gamma(t)\, mc^2 - mc^2 \underset{\text{si } v \ll c}{\simeq} \frac{1}{2} m v^2$$

▷ *Cas général ($m \geq 0$) : "Pythagore-Einstein"*

$$E^2 = \left(mc^2\right)^2 + \left(\overrightarrow{p}c\right)^2$$

► **Définition : quadrivecteur énergie-impulsion**

$$\tilde{p} \equiv m\tilde{u} \quad \text{donc} \quad p^0 = \gamma(t)\, mc = \frac{E}{c} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{p} = \gamma(t)\, m\overrightarrow{v}$$

► **Définition : quadrivecteur force de Minkowski**

$$\tilde{K} \quad \text{tel que} \quad K^0 \equiv \gamma(t)\, \frac{\overrightarrow{F}.\overrightarrow{v}}{c} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{K} \equiv \gamma(t)\, \overrightarrow{F}$$

► **Equation du mouvement relativiste**

$$\frac{d\tilde{p}}{d\tau} = \tilde{K} \quad \text{donc} \quad \frac{dE}{dt} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v} \quad \text{et} \quad m\frac{d}{dt}\left(\gamma\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{F}$$

2.3 Mécanique analytique pour une particule relativiste

► **Mécanique relativiste de Lagrange**

On définit le Lagrangien pour une particule relativiste dans un potentiel V par

$$L \equiv -\frac{mc^2}{\gamma(t)} - V = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\overrightarrow{v}^2(t)}{c^2}} - V$$

Les équations de Lagrange sont inchangées par rapport à la mécanique classique

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{x}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \overrightarrow{x}} = \overrightarrow{0}$$

► **Principe variationnel de Hamilton en mécanique relativiste**

On définit l'action pour une particule relativiste par

$$S\left[\overrightarrow{x}\right] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L\left(\frac{d\overrightarrow{x}}{dt}\right) dt$$

L'action S est un *invariant relativiste*, et est *minimale* pour la trajectoire physique.

► **Mécanique relativiste de Hamilton**

On définit les moments canoniques et le Hamiltonien d'une particule relativiste par

$$\overrightarrow{p}_{canon} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\overrightarrow{x}}} \quad \text{et} \quad H \equiv \overrightarrow{p}_{canon}.\overrightarrow{v} - L$$

Les équations canoniques de Hamilton sont inchangées par rapport à la mécanique classique

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \overrightarrow{p}_{canon}} \quad \text{et} \quad \dot{\overrightarrow{p}}_{canon} = \frac{d\overrightarrow{p}_{canon}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \overrightarrow{x}}$$