Mécanique Analytique

Une particule matérielle est contrainte à se déplacer sur une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, on paramétrise sa trajectoire par f coordonnées dites généralisées $q_1, ..., q_f$ où f est le nombre de degrés de liberté du système.

1 Formulation Lagrangienne de la mécanique

1.1 Grandeurs de la mécanique Lagrangienne

▶ **Fonction de Lagrange ou Lagrangien**

$$L \equiv T - V \qquad \text{où } T \text{ désigne l'énergie cinétique et } V \text{ le potentiel}$$

▶ **Moments canoniques**

$$p_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad \text{est le moment canonique associé à } q_\alpha$$

1.2 Equations de Lagrange

$$D_{\overrightarrow{q}} L = \overrightarrow{0} \qquad \text{i.e.} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad \text{pour } \alpha = 1, 2, ..., f$$

1.3 Théorème de Noether

(T) est une transformation de coordonnées dépendant d'un paramètre infinitésimal ε

$$\begin{aligned} q'_\alpha &= q_\alpha + \varepsilon \psi_\alpha \left(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{\dot{q}}, t\right) + O\left(\varepsilon^2\right) \qquad \text{pour } \alpha = 1, 2, ..., f \\ t' &= t + \varepsilon \varphi \left(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{\dot{q}}, t\right) + O\left(\varepsilon^2\right) \end{aligned} \tag{T}$$

Le Lagrangien exprimé dans le nouveau système de coordonnées $\left(\overrightarrow{q'}, \overrightarrow{\dot{q}'}, t'\right)$ est noté L'

$$L'\left(\overrightarrow{q'}, \overrightarrow{\dot{q}'}, t'\right) = L\left(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{\dot{q}}, t\right)$$

S'il existe une fonction $f\left(\overrightarrow{q}, t\right)$ telle que

$$L'\left(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{\dot{q}}, t\right) = L\left(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{\dot{q}}, t\right) + \frac{df}{dt}\left(\overrightarrow{q}, t\right)$$

alors la quantité $\tilde{Q}$ suivante est conservée

$$\tilde{Q} \equiv Q - f$$

où la charge de Noether Q s'écrit

$$Q \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\psi_\alpha + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)\varphi = p_\alpha \psi_\alpha + \left(L - p_\alpha \dot{q}_\alpha\right)\varphi$$

Cas particulier Si le Lagrangien est indépendant d'une coordonnée généralisée q_k (coordonnée cyclique), alors le moment canonique p_k associé est une constante du mouvement.

2 Principe variationnel de Hamilton

On considère toutes les trajectoires $t \mapsto \overrightarrow{q}(t)$ vérifiant les conditions au bord $\overrightarrow{q}(t_1) = \overrightarrow{q_1}$ et $\overrightarrow{q}(t_2) = \overrightarrow{q_2}$. On définit la fonctionnelle action agissant sur l'ensemble de ces trajectoires par

$$S[\vec{q}] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L\left(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{\dot{q}}, t\right) dt$$

Principe variationnel de Hamilton Si $t \mapsto \overrightarrow{q_0}(t)$ décrit la trajectoire physique de la particule, alors la fonctionnelle action S est stationnaire en $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{q_0}$

$$\delta S[\overrightarrow{q_0}] = 0$$

3 Formulation Hamiltonienne de la mécanique

3.1 Grandeurs de la mécanique Hamiltonienne

▶ **Fonction de Hamilton ou Hamiltonien**

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) \equiv \overrightarrow{p}.\overrightarrow{\dot{q}} - L(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

Expression inverse

$$L\left(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{\dot{q}}, t\right) = \overrightarrow{p}.\overrightarrow{\dot{q}} - H\left(\vec{q}, \overrightarrow{\dot{q}}, t\right)$$

▶ **Crochets de Poisson**

Pour deux observables classiques F et G

$$\{F, G\}_{(\vec{q},\vec{p})} \equiv \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\alpha}$$

Crochets de Poisson fondamentaux

$$\{q_\alpha, q_\beta\}_{(\vec{q},\vec{p})} = \{p_\alpha, p_\beta\}_{(\vec{q},\vec{p})} = 0 \qquad \text{et} \qquad \{q_\alpha, p_\beta\}_{(\vec{q},\vec{p})} = \delta_{\alpha\beta}$$

Identité de Jacobi

$$0 = \{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\}$$

3.2 Equations de Hamilton (équations canoniques)

▶ **Equations de Hamilton**

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \qquad \text{et} \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \qquad \text{pour } \alpha = 1, 2, ..., f$$

Reformulation en termes de crochets de Poisson

$$\dot{q}_\alpha = \{q_\alpha, H\}_{(\vec{q},\vec{p})} \qquad \text{et} \qquad \dot{p}_\alpha = \{p_\alpha, H\}_{(\vec{q},\vec{p})}$$

▶ **Conséquence : évolution temporelle d'une observable F**

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}_{(\vec{q},\vec{p})}$$

3.3 Transformations de coordonnées canoniques

▶ **Définition**

Soit (T) une transformation de coordonnées $(\vec{q}, \vec{p}) \mapsto \left(\vec{Q}, \vec{P}\right)$. On dit que (T) est canonique si et seulement si elle conserve les équations du mouvement, i.e. ssi les équations de Hamilton sont vérifiées dans le nouveau système de coordonnées

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial K}{\partial P_\alpha} \qquad \text{et} \qquad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial K}{\partial Q_\alpha} \qquad \text{pour } \alpha = 1, 2, ..., f$$

▶ **Théorème**

Une transformation de coordonnées est canonique si et seulement si elle conserve les crochets de Poisson fondamentaux

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\}_{(\vec{q},\vec{p})} = \{P_\alpha, P_\beta\}_{(\vec{q},\vec{p})} = 0 \qquad \text{et} \qquad \{Q_\alpha, P_\beta\}_{(\vec{q},\vec{p})} = \delta_{\alpha\beta}$$

3.4 Fonctions génératrices

▶ **Définition**

Pour une transformation de coordonnées canonique, puisque les équations du mouvement sont conservées, les Lagrangiens exprimés dans chaque système de coordonnées ne diffèrent que d'une dérivée temporelle totale

$$L(\vec{q}, \vec{p}, t) - L'\left(\vec{Q}, \vec{P}, t\right) = \frac{dF}{dt}\left(\vec{q}, \vec{p}, \vec{Q}, \vec{P}, t\right)$$

La fonction F est la fonction génératrice de la transformation de coordonnées.

Remarque Les $4f$ variables $\left(\vec{q}, \vec{p}, \vec{Q}, \vec{P}\right)$ ne sont pas indépendantes à cause des $2f$ relations de la transformation de coordonnées. On peut choisir le jeu de variables indépendantes dans lequel on veut travailler, d'où l'existence de 4 espèces de fonctions génératrices.

▶ **Fonction génératrice de deuxième espèce F_2**

C'est la fonction génératrice associée à une transformation canonique quand on travaille avec le jeu de coordonnées indépendantes $\left(\vec{q}, \vec{P}\right)$. Elle caractérise la transformation par

$$p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha} \qquad Q_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} \qquad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

▶ **Equation de Hamilton-Jacobi**

On cherche un système de coordonnées $\left(\vec{Q}, \vec{P}\right)$ pour lequel le Hamiltonien est identiquement nul $K = 0$. Dans ce cas les équations de Hamilton impliquent que $\vec{Q}$ et $\vec{P}$ sont des constantes du mouvement.

Pour cela il faut que la fonction génératrice F_2 vérifie l'équation aux dérivées partielles (Hamilton-Jacobi)

$$H\left(q_1, ..., q_f, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial F_2}{\partial q_f}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}\left(\vec{q}, \vec{P}, t\right) = 0$$

Remarque F_2 est alors appelée fonction principale de Hamilton et est notée S, la quantité associée correspond à l'action du principe variationnel.