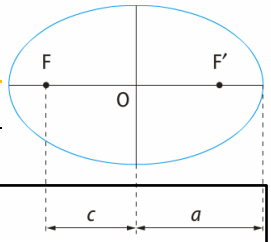
Lois de Kepler



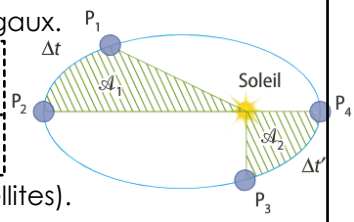
Synthèse des activités et compléments

Cours : Lois de Kepler

1ère Loi de Kepler (orbites) : Dans le référentiel de l'astre attracteur (soleil ou planète), les orbites (planètes ou satellites) sont des ellipses dont l'un des foyers est l'astre attracteur.
L'excentricité $e = c/a$ de l'ellipse caractérise l'écart par rapport au cercle.

2ème Loi de Kepler (aires) : Le segment soleil-planète balaie des aires égales en des temps égaux.

Corollaire : On peut choisir les points P tels que $\Delta t = \Delta t'$ d'où $A_1 = A_2$ d'après cette loi.
Si de plus la trajectoire est circulaire, on a $A_1 = A_2 \underset{r=Cte}{\Longrightarrow} P_1P_2 = P_3P_4 \Rightarrow v_1 = \frac{P_1P_2}{\Delta t} = \frac{P_3P_4}{\Delta t'} = v_2$
Donc, ***le mouvement d'un satellite en orbite circulaire est uniforme.***



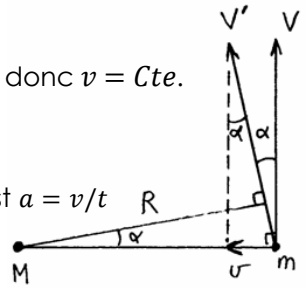
3ème Loi de Kepler (période) : Le rapport T^2/a^3 est le même pour toutes les planètes (ou satellites).
Il ne dépend que de la masse de l'astre attracteur : $\boxed{\frac{T^2}{a^3} = Cte = \frac{4\pi^2}{GM_{astre}}}$
où T est la période de révolution de la planète (ou satellite) et a le demi-grand axe de l'ellipse.

Cours : Cas d'une orbite circulaire

La première et la seconde Loi de Kepler sont difficiles à démontrer avec les outils mathématiques de Terminale S.
On se contentera de démontrer de façon rigoureuse la 3ème Loi dans le cas d'une orbite circulaire ($r = Cte = R$).

Système : Planète de masse m modélisée par un point matériel $M(m)$ attirée par un soleil de masse M_S
Référentiel : Héliocentrique, Repère cartésien $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y})$ et polaire $(O, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$.
Bilan des forces : Attraction gravitationnelle $\vec{F} = -\frac{GmM_S}{r^2}\vec{u_r}$
2ème Loi de Newton : $\boxed{\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{GM_S}{r^2}\vec{u_r}}$

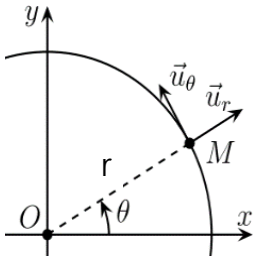
Analyse énergétique : (la plus simple, voir chapitre suivant pour les notions nouvelles)
On a $\vec{F}.\vec{v} = 0$ donc $W(\vec{F}) = 0$ donc $E_m = Cte$. Or $Em = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_S}{r}$ et $r = Cte$ donc $v = Cte$.
Donc, **le mouvement d'un satellite en orbite circulaire est uniforme.**



Analyse géométrique : L'accélération prise par m en direction de M pendant t très court est $a = v/t$
Or $\alpha \simeq \frac{v}{V} = \frac{at}{V}$ et $\alpha = \frac{Vt}{R}$ d'où $\boxed{a = v^2/R}$ pour une trajectoire circulaire.

Analyse cinématique : $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u_r} \Rightarrow \vec{v} = r\frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta} = v\,\vec{u_\theta} \Rightarrow \vec{a} = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{e_r} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u_\theta} = -\frac{v^2}{r}\vec{u_r} + \frac{dv}{dt}\vec{u_\theta}}$

car on peut montrer que $\boxed{\begin{cases} \frac{d\vec{u_r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta\,\vec{u_x} + \sin\theta\,\vec{u_y}) = -\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\,\vec{u_x} + \frac{d\theta}{dt}\cos\theta\,\vec{u_\theta} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta} \\ \frac{d\vec{u_\theta}}{dt} = \frac{d}{dt}(-\sin\theta\,\vec{u_x} + \cos\theta\,\vec{u_\theta}) = \frac{d\theta}{dt}\cos\theta\,\vec{u_x} + \frac{d\theta}{dt}\sin\theta\,\vec{u_y} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u_r} \end{cases}}$



On en déduit par identification que $\boxed{\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v = Cte}}$
Donc, **le mouvement d'un satellite en orbite circulaire est uniforme.**

D'où : $\boxed{a = \frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{v^2}{r} = \frac{GM_S}{r^2}} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v = \sqrt{\frac{GM_S}{r}}}}$ d'où $T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{T = \frac{2\pi r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM_S}}}} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}}$ (3ème Loi de Kepler)

Entraînez-vous à ces calculs…
…et amusez-vous avec les lois de la physique !